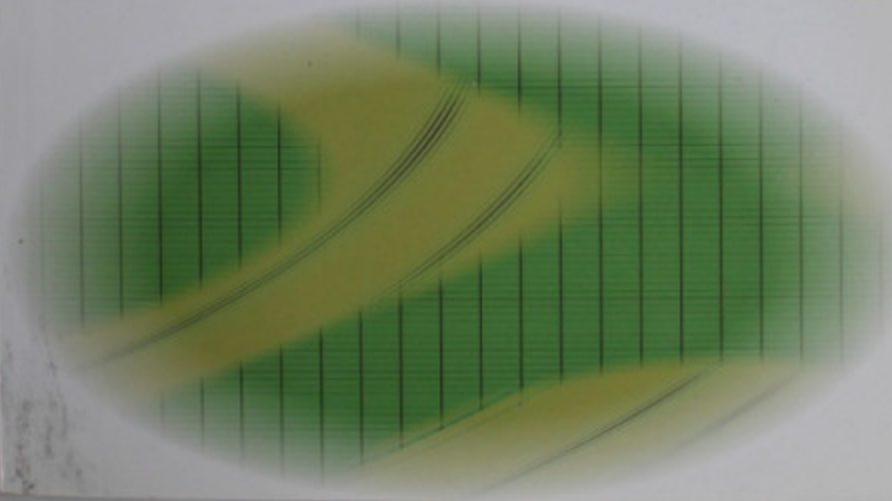
Editura PARALELA 45

MATE 2000 + 8/9

PROBLEME DE MATEMATICĂ

Traian Cohal
Gheorghe Iurea

clasa XI



TRAIAN COHAL **GHEORGHE IUREA**

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a XI-a

Editura TAIDA
IAŞI – 2006

EDITURA TAIDA Iaşi
Str. Vasile Lupu, nr. 70-74, bl. P3, sc. 3, et. 3, ap. 12, Iaşi - 700309
Tel/fax : ***0232.270250;*** Gsm. ***0744.320323***
www.edituratаida.ro; office@edituratаida.ro; www.eduzone.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Probleme de matematică pentru clasa a XI-a
/ Cohal Traian, Iurea Gheorghe
Iaşi, TAIDA, 2006

p. 312; 17 x 24 cm;

ISBN: (10) 973-7669-04-5; (13) 978-973-7669-04-9

1. Iurea Gheorghe

51(075.35)(076)

www.edituratаida.ro
www.eduzone.ro

© *Toate drepturile, aparţin Editurii TAIDA. Nici o parte a acestei cărţi nu poate fi retipărită, reprodusă sau utilizată în orice alt fel, inclusiv prin fotocopiere sau în formă electronică, fără avizul prealabil în scris al editurii.*

C U P R I N S

Capitolul I – Permutări ……. 5

Capitolul II – Matrice ……..... 11

Capitolul III – Determinanţi ……. 45

Capitolul IV – Matrice inversabile. Ecuaţii matriceale …… 67

Capitolul V – Sisteme liniare

§ 1. Rangul unei matrice…… 81

§ 2. Sisteme de ecuaţii liniare …… 86

Capitolul VI – Şiruri ……..….. 103

Capitolul VII – Limite de funcţii. Asimptote

§ 1. Limite de funcţii ……..... 133

§ 2. Asimptote ……. 162

Capitolul VIII – Funcţii continue …….. 169

Capitolul IX – Funcţii derivabile …… 199

Capitolul X – Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor ……. 227

Capitolul XI – Grafice de funcţii

§ 1. Reprezentarea grafică a funcţiilor ……. 281

§ 2. Rezolvarea grafică a ecuaţiilor ……..…… 296

Bibliografie ……..…….....…… 309

CAPITOLUL I

PERMUTĂRI

Probleme rezolvate

1. ***Se consideră permutările*** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ***şi*** $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$**.**

Arătaţi că $(\sigma\,\varphi)\,\tau = \sigma(\varphi\,\tau)$**.**

Soluţie: Evidenţiind faptul că $\sigma\,\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, deducem că

$$(\sigma\,\varphi)\,\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Având în vedere că $\varphi\,\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, conchidem că

$$\sigma\,(\varphi\,\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ca urmare a celor stabilite anterior, $(\sigma\,\varphi)\,\tau = \sigma(\varphi\,\tau)$.

2. a) ***Se consideră permutările*** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ***şi*** $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$**.** ***Arătaţi că*** $\sigma\,\tau \neq \tau\,\sigma$**.**

b) ***Se consideră permutările*** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ***şi*** $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$**.** ***Arătaţi că*** $\sigma\,\tau = \tau\,\sigma$**.**

Soluţie: a) Ţinând seama că $\sigma\,\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, iar

$\tau\,\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, rezultă că $\sigma\,\tau \neq \tau\,\sigma$.

b) Evidenţiind faptul că $\sigma\,\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, iar

$\tau\,\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, conchidem că $\sigma\,\tau = \tau\,\sigma$.

3. ***Se consideră permutarea*** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$**.** ***Arătaţi că*** $\sigma^{10} = e$**.**

Soluţie: Remarcând că $\sigma^2 = \sigma\,\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma^4 = \sigma^2\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^8 = \sigma^4\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

şi $\sigma^{10} = \sigma^8\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e$, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

4. ***Se consideră permutarea*** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$**.** ***Determinaţi*** σ^{2006}

Soluție: Pentru început, remarcăm că $\sigma^2 = \sigma\,\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \sigma^2\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma^4 = \sigma^3\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$. Cum $\sigma^{2006} = \sigma^{2004}\sigma^2 = \left(\sigma^4\right)^{501}\sigma^2 = e^{501}\sigma^2 = e\,\sigma^2 = \sigma^2$, rezultă că $\sigma^{2006} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

5. ***Se consideră permutările*** $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ***şi*** $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$**.**

Fie $H = \{\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3\}$**.** ***Arătați că*****:**

a) $\sigma_i\,\sigma_j \in H$**,** ***oricare ar fi*** $i, j = \overline{0,\ 3}$**;**

b) $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$**,** ***oricare ar fi*** $i, j = \overline{0,\ 3}$**;**

c) $\sigma_i^{-1} \in H$**,** ***oricare ar fi*** $i = \overline{0,\ 3}$**.**

Soluție: Se arată cu uşurință că au loc următoarele egalități: $\sigma_0\sigma_0 = \sigma_0$, $\sigma_0\sigma_1 = \sigma_1$, $\sigma_0\sigma_2 = \sigma_2$, $\sigma_0\sigma_3 = \sigma_3$, $\sigma_1\sigma_0 = \sigma_1$, $\sigma_1\sigma_1 = \sigma_0$, $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$, $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_2$, $\sigma_2\sigma_0 = \sigma_2$, $\sigma_2\sigma_1 = \sigma_3$, $\sigma_2\sigma_2 = \sigma_0$ $\sigma_2\sigma_3 = \sigma_1$, $\sigma_3\sigma_0 = \sigma_3$, $\sigma_3\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_3\sigma_2 = \sigma_1$ şi $\sigma_3\sigma_3 = \sigma_0$. Din cele stabilite anterior, rezultă că $\sigma_i\,\sigma_j \in H$ şi $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$, oricare ar fi $i, j = \overline{0,\ 3}$. Evident, σ_0 este permutarea identică. Remarcând că $\sigma_0\sigma_0 = \sigma_0$, $\sigma_1\sigma_1 = \sigma_0$, $\sigma_2\sigma_2 = \sigma_0$ şi $\sigma_3\sigma_3 = \sigma_0$, deducem că $\sigma_0^{-1} = \sigma_0$, $\sigma_1^{-1} = \sigma_1$, $\sigma_2^{-1} = \sigma_2$ şi $\sigma_3^{-1} = \sigma_3$. Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

6. ***Se consideră permutarea*** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$**.** ***Determinați permutarea*** $x \in S_4$ ***astfel încât*** $x^2 = \sigma$**.**

Soluție: Fie $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(4) \end{pmatrix}$ permutarea căutată.

Rezultă că $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x\left(x(1)\right) & x\left(x(2)\right) & x\left(x(3)\right) & x\left(x(4)\right) \end{pmatrix}$. Remarcând că $x^2 = \sigma$, deducem că

$$x\left(x(1)\right) = 4,\ x\left(x(2)\right) = 3,\ x\left(x(3)\right) = 2,\ x\left(x(4)\right) = 1. \qquad (1)$$

Dacă $x(1) = 1$, atunci $x(1) = x\left(x(1)\right) = 4$ (din prima dintre egalitățile (1)), ceea ce nu este posibil (căci orice permutare este o funcție). Dacă $x(1) = 2$, atunci $x(2) = x\left(x(1)\right) = 4$, ceea ce implică $x(4) = x\left(x(2)\right) = 3$, de unde $x(3) = x\left(x(4)\right) = 1$. Rezultă că permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ este o soluție a problemei. Dacă $x(1) = 3$, atunci $x(3) = 4$, de unde $x(4) = 2$, ceea ce implică $x(2) = 1$ (s-a ținut seama de egalitățile (1)). Ca atare şi permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ este o soluție a problemei. Dacă $x(1) = 4$, atunci $x(4) = 4$, ceea ce implică $x(1) = x(4)$. Cum orice permutare este o funcție injectivă, ultima egalitate nu poate avea loc. Deci, situația considerată nu convine.

7. ***Se consideră permutarea*** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$**.** ***Determinați permutările*** $x \in S_5$ ***astfel încât*** $\sigma\,x = x\,\sigma$**.**

Soluție: Fie $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$ una dintre permutările căutate. Remarcând că $\sigma\,x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) & \sigma(d) & \sigma(e) \end{pmatrix}$, iar $x\,\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ b & c & a & e & d \end{pmatrix}$, egalitatea $\sigma\,x = x\,\sigma$ are loc dacă şi numai dacă $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = c$, $\sigma(c) = a$, $\sigma(d) = e$ şi $\sigma(e) = d$. Trebuie să analizăm următoarele situații:

1) Fie $a=1$. În acest caz, $\sigma(a)=\sigma(1)=2$, ceea ce, împreună cu $\sigma(a)=b$, conduce la $b=2$. Rezultă că $\sigma(b)=\sigma(2)=3$, de unde $c=3$ (căci $\sigma(b)=c$). Drept urmare, $\sigma(c)=\sigma(3)=1$, ceea ce implică $a=1$ (fiindcă $\sigma(c)=a$). Dacă $\sigma(d)=4$, atunci $e=4$ şi $d=5$, iar dacă $\sigma(d)=5$, atunci $e=5$ şi $d=4$. Rezultă că, în cazul considerat, problema are două soluţii, şi anume, permutările:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}.$$

2) Fie $a=2$. Atunci, $\sigma(a)=\sigma(2)=3$, ceea ce conduce la $b=3$. Prin urmare $\sigma(b)=\sigma(3)=1$, de unde $c=1$. Rezultă că $\sigma(c)=\sigma(1)=2$ şi, deci, $a=2$. Dacă $\sigma(d)=4$, atunci $e=4$ şi $d=5$, iar dacă $\sigma(d)=5$, atunci $e=5$ şi $d=4$. Deducem că, în cazul considerat, soluţiile problemei sunt permutările:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}.$$

3) Fie $a=3$. Raţionând în acelaşi mod ca în situaţiile anterioare, obţinem soluţiile:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&4&5\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}$$

4) Fie $a=4$. În acest caz, $\sigma(a)=\sigma(4)=5$, de unde $b=5$. Rezultă că $\sigma(b)=\sigma(5)=4$, de unde $c=4$, ceea ce nu este posibil (căci σ este o bijecţie).

5) Fie $a=5$. Atunci, $\sigma(a)=\sigma(5)=4$, de unde $b=4$. Drept urmare, $\sigma(b)=\sigma(4)=5$, de unde $c=5$, ceea ce nu este posibil. Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

8. ***Se consideră permutările*** $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&2&4\end{pmatrix}$ ***şi*** $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&4&3\end{pmatrix}$***. Determinaţi*** σ^{-1}, τ^{-1}, $(\sigma\tau)^{-1}$ ***şi, apoi, verificaţi că*** $(\sigma\tau)^{-1}=\tau^{-1}\sigma^{-1}$**.**

Soluţie: Se arată cu uşurinţă că $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&5&3\end{pmatrix}$, iar $\tau^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&4&2\end{pmatrix}$. Cum $\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&3&2&5\end{pmatrix}$, rezultă că $(\sigma\tau)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&3&2&5\end{pmatrix}$. Remarcând că $\tau^{-1}\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&3&2&5\end{pmatrix}$, deducem că $(\sigma\tau)^{-1}=\tau^{-1}\sigma^{-1}$.

9. ***Se consideră permutările*** $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$ ***şi*** $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$***. Determinaţi permutarea*** $x\in S_4$**,** ***ştiind că*** $\sigma x\tau=e$**.**

Soluţie: Întrucât $\sigma x\tau=e$, rezultă că $x=\sigma^{-1}\tau^{-1}$. Având în vedere că $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$, iar $\tau^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$, conchidem că $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$.

10. ***Se consideră permutările*** $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&2&3\end{pmatrix}$ ***şi*** $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&1&4\end{pmatrix}$***. Determinaţi*** $x\in S_5$**,** ***ştiind că*** $\sigma x\tau=e$**.**

Soluţie: Pentru început, remarcăm că $\sigma x\tau=e\Leftrightarrow x\tau=\sigma^{-1}\Leftrightarrow x=\sigma^{-1}\tau^{-1}$. Evidenţiind şi faptul că $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$, iar $\tau^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&1&5&3\end{pmatrix}$, conchidem că $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&2&3&5\end{pmatrix}$.

11. ***Se consideră permutările*** $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$ ***şi*** $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$***. Determinaţi cea mai mică valoare a lui*** $n\in\boldsymbol{N}^*$***, astfel încât*** $\tau^n=\sigma^{-1}$**.**

Soluție: Evident, egalitatea $\tau^n = \sigma^{-1}$ este echivalentă cu $\sigma\,\tau^n = e$. Întrucât $\sigma\,\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq e$, $n = 1$ nu convine. Remarcând că $\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, iar $\sigma\,\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$, deducem că $n = 2$ este soluția problemei.

12. ***Se consideră permutarea*** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. ***Determinați cea mai mică valoare a lui*** $n \in \boldsymbol{N^*}$, ***astfel încât*** $\sigma^n = e$. ***Calculați, apoi,*** σ^{10}, σ^{52}, σ^{-2} ***și*** σ^{-10}.

Soluție: Deoarece $\sigma^2 = \sigma\,\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, iar $\sigma^3 = \sigma^2\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$, rezultă că $n = 3$. Având în vedere că $\sigma^{10} = \sigma^9\sigma = \left(\sigma^3\right)^3\sigma = e^3\sigma = e\,\sigma = \sigma$, $\sigma^{52} = \sigma^{51}\sigma = \left(\sigma^3\right)^{17}\sigma = e^{17}\sigma = \sigma$, $\sigma^{-2} = \sigma^{-3}\sigma = \left(\sigma^3\right)^{-1}\sigma = e\,\sigma = \sigma$, $\sigma^{-10} = \sigma^{-12}\sigma^2 = \left(\sigma^3\right)^{-4}\sigma^2 = e^{-4}\sigma^2 = \sigma^2$, deducem că

$$\sigma^{10} = \sigma^{52} = \sigma^{-2} = \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ iar } \sigma^{-10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. ***Determinați permutările pare de forma*** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & i & j & 2 & 5 & k \end{pmatrix}$.

Soluție: Evident $i,\ j,\ k \in \{1,\ 3,\ 6\}$, iar $i \neq j$, $j \neq k$ și $k \neq i$. Prin urmare permutările de forma menționată în enunțul problemei sunt: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Deoarece $m(\sigma_1) = 4,\ m(\sigma_2) = 7,$ $m(\sigma_3) = 5,\quad m(\sigma_4) = 10,\quad m(\sigma_5) = 8$ și $m(\sigma_6) = 11$, conchidem că permutările pare sunt $\sigma_1,\ \sigma_4$ și σ_5.

14. ***Determinați signatura fiecăreia dintre următoarele permutări:***

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluție: Deoarece $m(\sigma_1) = 3,\quad m(\sigma_2) = 4,\quad m(\sigma_3) = 5,\quad m(\sigma_4) = 8$, rezultă că $\varepsilon(\sigma_1) = -1,\ \varepsilon(\sigma_2) = 1,$ $\varepsilon(\sigma_3) = -1,\ \varepsilon(\sigma_4) = 1$.

15. ***Se consideră permutările*** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ***și*** $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. ***Determinați*** $\varepsilon(\sigma),\ \varepsilon(\tau)$ ***și*** $\varepsilon(\sigma\,\tau)$. ***Verificați, apoi, că*** $\varepsilon(\sigma\,\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

Soluție: Deoarece $m(\sigma) = 3 + 1 = 4$ și $m(\tau) = 1 + 3 + 2 + 1 = 7$, rezultă că $\varepsilon(\sigma) = 1$ și $\varepsilon(\tau) = -1$. Având în vedere că $\sigma\,\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, deducem că $m(\sigma\,\tau) = 2 + 1 + 2 = 5$, de unde $\varepsilon(\sigma\,\tau) = -1$. Cum $\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -1$, conchidem că $\varepsilon(\sigma\,\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

16. ***Se consideră permutarea*** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. ***Arătați că*** $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le 4} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că

$$\prod_{1 \le i < j \le 4} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2 - 1} \cdot \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{3 - 1} \cdot \frac{\sigma(3) - \sigma(2)}{3 - 2} \cdot \frac{\sigma(4) - \sigma(1)}{4 - 1} \cdot \frac{\sigma(4) - \sigma(2)}{4 - 2} \cdot \frac{\sigma(4) - \sigma(3)}{4 - 3} =$$

$$= \frac{3 - 4}{1} \cdot \frac{1 - 4}{2} \cdot \frac{1 - 3}{1} \cdot \frac{2 - 4}{3} \cdot \frac{2 - 3}{2} \cdot \frac{2 - 1}{1} = -1$$

Pe de altă parte, $m(\sigma) = 2 + 2 + 1 = 5$, de unde $\varepsilon(\sigma) = -1$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

17. ***Se consideră permutarea*** $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&...&10&11&12&...&19&20\\2&4&6&...&20&1&3&...&17&19\end{pmatrix}$. ***Determinați*** $\varepsilon(\sigma)$.

Soluție: Întrucât $m(\sigma)=10+9+...+2+1=\frac{10\cdot 11}{2}=55$, rezultă că $\varepsilon(\sigma)=-1$.

18. ***Fie*** $n\in N,\ n\geq 2$ ***şi permutarea*** $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&...&n&n+1&n+2&n+4&...&2n\\1&3&5&7&...&2n-1&2&4&6&...&2n\end{pmatrix}$.

a) ***Determinați*** $m(\sigma)$.

b) ***Ce condiție trebuie să îndeplinească*** n ***, pentru ca*** σ ***să fie o permutare impară ?***

Soluție: a) Se observă cu uşurință că $m(\sigma)=(n-1)+(n-2)+...+2+1=\frac{(n-1)n}{2}$.

b) Evident, permutarea σ este impară dacă şi numai dacă $m(\sigma)$ este un număr natural impar. Cum $m(\sigma)=\frac{(n-1)n}{2}$, condiția anterioară este îndeplinită doar dacă $4\nmid n(n-1)$, ceea ce are loc atunci când $n=4k+2$ sau $n=4k+3$ ($k\in N$).

Probleme propuse

1. Se consideră permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$, $\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$. Arătați că $(\sigma\,\varphi)\,\tau=\sigma(\varphi\,\tau)$.

2. Se consideră permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$. Arătați că $\sigma\,\tau=\tau\,\sigma$.

3. Se consideră permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$. Arătați că $\sigma\,\tau\neq\tau\,\sigma$.

4. Pentru fiecare dintre permutările $\sigma_k\in S_3,\ k=\overline{0,\ 5}$, determinați cel mai mic $n\in N^*$ cu proprietatea că $\sigma_k^n=e$.

5. Se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&4&2&3\end{pmatrix}$. Determinați cea mai mică valoare a lui $n\in N^*$, astfel încât $\sigma_k^n=e$.

6. Se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&1&2\end{pmatrix}$. Calculați σ^{2006}.

7. Fie $n\in N^*$ şi permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$. Calculați σ^n.

8. Se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$. Determinați permutarea $x\in S_4$, ştiind că $x^2=\sigma$.

9. Se consideră permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&5&1&4\end{pmatrix}$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}$. Determinați σ^{-1}, τ^{-1}, $(\sigma\,\tau)^{-1}$ şi, apoi, verificați că $(\sigma\,\tau)^{-1}=\tau^{-1}\sigma^{-1}$.

10. Se consideră permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&1&4&3&6&2\end{pmatrix}$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&4&3&6&5\end{pmatrix}$. Determinați permutările $x,\ y\in S_6$, ştiind că $\sigma\,x=\tau$ şi $y\,\sigma=\tau$.

11. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați σ^{16}, σ^{53}, σ^{-2} și σ^{-16}.

12. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculați σ^{47}, τ^{9}, $\sigma^{72}\tau^{101}$, $\sigma^{102}\tau^{-5}$ și $\sigma^{-12}\tau^{-3}$.

13. Determinați numărul de inversiuni, pentru fiecare dintre următoarele permutări:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ și } \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

14. Determinați permutarea pară de forma $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & i & 4 & j & 2 \end{pmatrix}$.

15. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ Determinați $\varepsilon(\sigma)$.

16. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că $\prod_{1 \le i < j \le 4} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \varepsilon(\sigma)$.

17. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 10 & 11 & 12 & \dots & 19 & 20 \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 19 & 2 & 4 & \dots & 18 & 20 \end{pmatrix}$. Determinați $\varepsilon(\sigma)$.

18. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați $m(\sigma)$.

b) Ce condiție trebuie să îndeplinească n, pentru ca σ să fie o permutare pară ?

Răspunsuri

5. $n = 5$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ **7.** $\sigma^{4k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $(k \in \boldsymbol{N}^*)$, $\sigma^{4k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^{4k+2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma^{4k+3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $(k \in \boldsymbol{N})$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **9.** $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

10. $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ **11.** $\sigma^3 = e$, $\sigma^{16} = \sigma$, $\sigma^{53} = \sigma^2$, $\sigma^{-2} = \sigma$, $\sigma^{-16} = \sigma^2$

12. $\sigma^5 = e$, $\tau^4 = e$, $\sigma^{47} = \sigma^2$, $\tau^9 = \tau$, $\sigma^{72}\tau^{101} = \sigma^2\tau$, $\sigma^{102}\tau^{-5} = \sigma^2\tau^3$, $\sigma^{-2}\tau^{-3} = \sigma^3\tau$ **13.** $m(\sigma_1) = 3$, $m(\sigma_2) = 3$, $m(\sigma_3) = 4$, $m(\sigma_4) = 8$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ **15.** $m(\sigma) = 9$ și $\varepsilon(\sigma) = -1$ **17.** $m(\sigma) = 45$ și $\varepsilon(\sigma) = -1$ **18. a)** $m(\sigma) = \frac{n(n+1)}{2}$; **b)** $n = 4k$ $(k \in \boldsymbol{N}^*)$ sau $n = 4k+3$ $(k \in \boldsymbol{N})$.

CAPITOLUL II

MATRICE

Probleme rezolvate

1. ***Se consideră mulțimea*** $M=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij}\in \boldsymbol{Z},\ i,j=\overline{1,2}\right\}$. ***Determinați numărul elementelor mulțimii M, știind că*** $a_{ij}=0$ ***dacă*** $i=j$ ***și că*** $|a_{ij}|\le 1$ ***dacă*** $i\neq j$.

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că $a_{11}=a_{22}=0$. Evidențiind și faptul că fiecare dintre elementele a_{12} și a_{21} ia câte trei valori (căci, pentru $i\neq j$, avem $|a_{ij}|\le 1$ și $a_{ij}\in \boldsymbol{Z}$, ceea ce implică $a_{ij}\in\{-1,\ 0,\ 1\}$), deducem că numărul elementelor mulțimii M este $3^2=9$.

2. ***Se consideră mulțimea*** $M=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid a_{ij}\in \boldsymbol{R},\ i,j=\overline{1,3}\right\}$. ***Determinați numărul elementelor mulțimii M, știind că*** $a_{ij}=0$ ***dacă*** $i=j$ ***și că*** $|a_{ij}|=1$ ***dacă*** $i\neq j$ $\left(i,j=\overline{1,3}\right)$.

Soluție: Cum elementele a_{ii} sunt unic determinate, iar fiecare dintre elementele a_{ij} $(i\neq j)$, care sunt în număr de 6, ia câte două valori (căci $a_{ij}\in\{-1,\ 1\}$), rezultă că numărul elementelor mulțimii M este $2^6=64$.

3. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ***și*** $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. ***Calculați*** $A+B,\quad A-B,\quad A+{}^tA$ ***și*** $B-{}^tB$.

Soluție: Se arată cu ușurință că $A+B=\begin{pmatrix} 2+1 & 3+3 \\ 1+1 & -1-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 2-1 & 3-3 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$, $A+{}^tA=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ și $B-{}^tB=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

4. ***Se consideră numerele reale*** $x,\ y,\ z,\ t$ ***și matricele*** $A=\begin{pmatrix} 3x & 2y \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2z & -t \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$. ***Determinați*** $x,\ y,\ z$ ***și*** t, ***știind că*** $2A+3B=C$.

Soluție: Deoarece $2A+3B=\begin{pmatrix} 6x & 4y \\ -2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6z & -3t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x+6 & 4y-3 \\ 6z-2 & -3t-2 \end{pmatrix}$, egalitatea $2A+3B=C$ are loc dacă și numai dacă $6x+6=0,\ 4y-3=5,\ 6z-2=4$ și $-3t-2=-8$, de unde $x=-1,\ y=2,\ z=1$ și $t=2$.

5. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ***și*** $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ***Determinați matricele*** $A+B,$ $B-A$ ***și*** $3A+2B$.

Soluție: Se arată cu uşurință că $A+B=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&-1&4\\2&1&1\end{pmatrix}$, $B-A=\begin{pmatrix}1&1&3\\-3&1&-2\\0&3&1\end{pmatrix}$ şi $3A+2B=\begin{pmatrix}3&0&-3\\6&-3&9\\3&-3&0\end{pmatrix}+$

$+\begin{pmatrix}4&2&4\\-2&0&2\\2&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2&1\\4&-3&11\\5&1&2\end{pmatrix}$.

6. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\-3&2\end{pmatrix}$ ***şi*** $B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\\1&2\end{pmatrix}$***. Determinați matricea*** X***, ştiind că*** $2X+3A=5B$**.**

Soluție: Evident, condiția din enunț este echivalentă cu $2X=5B-3A$. Remarcând că $5B-3A=\begin{pmatrix}5&-5\\10&-10\\5&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9&-3\\6&0\\-9&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2\\4&-10\\14&4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-2&-1\\2&-5\\7&2\end{pmatrix}$, deducem că $X=\begin{pmatrix}-2&-1\\2&-5\\7&2\end{pmatrix}$.

7. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&1&-2\end{pmatrix}$ ***şi*** $B=\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\\0&-3\end{pmatrix}$***. Calculați:***

a) $A+{}^tB$ ***şi*** ${}^tA-B$ ***;***

b) $2\cdot{}^tA+3\cdot B$ ***şi*** $3\cdot A-2\cdot{}^tB$**.**

Soluție: a) Evident,

$A+{}^tB=\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&3&0\\2&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&5&3\\-1&2&-5\end{pmatrix}$, iar ${}^tA-B=\begin{pmatrix}1&-3\\2&1\\3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&0\\3&1\end{pmatrix}$.

b) Având în vedere că $2\cdot{}^tA+3\cdot B=2\begin{pmatrix}1&-3\\2&1\\3&-2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-6\\4&2\\6&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&6\\9&3\\0&-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\13&5\\6&-13\end{pmatrix}$, iar

$3\cdot A-2\cdot{}^tB=\begin{pmatrix}3&6&9\\-9&3&-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&6&0\\4&2&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&9\\-13&1&0\end{pmatrix}$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

8. ***Se consideră matricele:*** $A=\begin{pmatrix}2&m&-2&2\\4&-1&2m&5\\2&10&-12&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&m&1&-1\\-4&0&6&n\\-1&-5&6&0\end{pmatrix}$ ***şi*** $C=\begin{pmatrix}-1&-4&-1&1\\0&-1&-m&2\\p&5&-6&1\end{pmatrix}$**.**

Este posibil ca $A+B=C$ **?**

Soluție: Deoarece $A+B=\begin{pmatrix}-1&2m&-1&1\\0&-1&2m+6&n+5\\1&5&-6&1\end{pmatrix}$, egalitatea $A+B=C$ este posibilă dacă şi numai dacă

$2m=-4$, $2m+6=-m$, $n+5=2$ şi $p=1$, ceea ce conduce la $m=-2$, $n=-3$ şi $p=1$.

9. ***Fie matricele*** $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&3&-4\\-1&2&0\end{pmatrix}$ ***şi*** $B=\begin{pmatrix}0&2&-2\\-4&6&2\\2&0&4\end{pmatrix}$***. Determinați matricele*** X, Y ***, ştiind că***

$X+Y=A$ ***şi*** $2X+4Y=B$**.**

Soluție: Evident, $\begin{cases} X+Y=A \\ 2X+4Y=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=A-Y \\ 2(A-Y)+4Y=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=A-Y \\ 2Y=B-2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=2A-\frac{1}{2}B \\ Y=\frac{1}{2}B-A \end{cases}$. Deducem imediat că $X=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -9 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ și $Y=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

10. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. ***Determinați matricele*** $X \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ ***cu proprietatea că*** $X+{}^tX=A$.

Soluție: Fie $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ una dintre matricele căutate. Cum ${}^tX=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$, rezultă că $X+{}^tX=$

$=\begin{pmatrix} 2a & b+d & c+g \\ d+b & 2e & h+f \\ g+c & h+f & 2i \end{pmatrix}$. Ținând seama și de faptul că $X+{}^tX=A$, deducem că $2a=2,\ b+d=4,$ $c+g=6,\ 2e=6,\ f+h=8,\ 2i=10$, de unde $a=1,\ d=4-b,\ g=6-c,\ e=3,\ h=8-f,\ i=5$. Drept urmare, matricele $\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 4-b & 3 & f \\ 6-c & 8-f & 5 \end{pmatrix}$ ($b,\ c,\ f$ arbitrare în $\boldsymbol{R}$) sunt soluțiile problemei.

11. ***Fie matricea*** $A \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{C})$. ***Arătați că există o singură pereche de matrice*** $B,\ C \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{C})$ ***astfel încât*** $B+C=A$, ***iar*** ${}^tB=B$ ***și*** ${}^tC=-C$.

Soluție: Pentru început, evidențiem faptul că ${}^t\left({}^tX\right)=X$ și că ${}^t(X+Y)={}^tX+{}^tY$, oricare ar fi matricele $X,\ Y \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{C})$.

Să arătăm că matricele $B=\frac{1}{2}\left(A+{}^tA\right)$ și $C=\frac{1}{2}\left(A-{}^tA\right)$ reprezintă soluția problemei. Într-adevăr, $B+C=A$, iar ${}^tB=\frac{1}{2}{}^t\left(A+{}^tA\right)=\frac{1}{2}\left({}^tA+A\right)=B$ și ${}^tC=\frac{1}{2}{}^t\left(A-{}^tA\right)=\frac{1}{2}\left({}^tA-A\right)=-\frac{1}{2}\left(A-{}^tA\right)=-C$. Rămâne să demonstrăm unicitatea matricelor B și C. Presupunând că și matricele $B_1,\ C_1$ îndeplinesc condițiile din enunț, deducem că $B_1+C_1=A$ și că ${}^tB_1=B_1,\ {}^tC_1=-C_1$. Rezultă că ${}^tA={}^t\left(B_1+C_1\right)=B_1-C_1$. Drept urmare, $B_1=\frac{1}{2}\left(A+{}^tA\right)=B$ și $C_1=\frac{1}{2}\left(A-{}^tA\right)=C$.

12. ***Fie*** $a,\ b \in \boldsymbol{R},\ a \neq 0$ ***și funcția*** $f:\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R}) \to \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R}),\ f(X)=aX+bI_3$. ***Arătați că funcția*** f ***este bijectivă.***

Soluție: Fie $X_1,\ X_2 \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ astfel încât $f(X_1)=f(X_2)$. Evident, $f(X_1)=f(X_2) \Rightarrow aX_1+bI_3=$ $=aX_2+bI_3 \Rightarrow aX_1=aX_2 \Rightarrow a\left(X_1-X_2\right)=O_3 \Rightarrow X_1-X_2=O_3 \Rightarrow X_1=X_2$ (căci $a \neq 0$). Prin urmare, funcția f este injectivă.

Fie $Y \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ (oarecare). Considerăm matricea $X=\frac{1}{a}Y-\frac{b}{a}I_3$. Cum $X \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ și $f(X)=a\left(\frac{1}{a}Y-\frac{b}{a}I_3\right)+bI_3=Y-bI_3+bI_3=Y$, rezultă că funcția f este și surjectivă. Ca urmare a celor stabilite anterior, funcția f este bijectivă.

13. ***Se consideră matricea*** $A_k=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2k\\ 0 & 4k & 3k(k-1)\end{pmatrix}$ $(k\in \boldsymbol{N}^*)$**.** ***Determinați matricea*** $B=\sum_{k=1}^{n}A_k$ **.**

Soluție: Evident, $B=\begin{pmatrix}n & -n & 2\sum_{k=1}^{n}k\\ 0 & 4\sum_{k=1}^{n}k & 3\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\end{pmatrix}$. Ținând seama și de faptul că $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, iar $\sum_{k=1}^{n}k(k-1)=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n^2-1)}{3}$,deducem că $B=\begin{pmatrix}n & -n & n(n+1)\\ 0 & 2n(n+1) & n(n^2-1)\end{pmatrix}$.

14. ***Se consideră matricea*** $A_k=\begin{pmatrix}1 & k(3k+1) & \frac{1}{k(k+1)}\\ k\cdot k! & C_n^k & 2^k\end{pmatrix}$ $(k\in \boldsymbol{N}^*)$**.** ***Determinați matricea*** $B=\sum_{k=1}^{n}A_k$ **.**

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că $B=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}1 & \sum_{k=1}^{n}k(3k+1) & \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\\ \sum_{k=1}^{n}k\cdot k! & \sum_{k=1}^{n}C_n^k & \sum_{k=1}^{n}2^k\end{pmatrix}$. Având în vedere și faptul că $\sum_{k=1}^{n}1=n$, $\sum_{k=1}^{n}k(3k+1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=n(n+1)^2$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$, $\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)!-k!\right]=(n+1)!-1$, $\sum_{k=1}^{n}C_n^k=2^n-1$ și $\sum_{k=1}^{n}2^k=2\left(1+2+\ldots+2^{n-1}\right)=2\left(2^n-1\right)=2^{n+1}-2$, conchidem că $B=\begin{pmatrix}n & n(n+1)^2 & \frac{n}{n+1}\\ (n+1)!-1 & 2^n-1 & 2^{n+1}-2\end{pmatrix}$.

15. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ ***și*** $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$**.** ***Calculați*** AB ***și*** ${}^tA\cdot{}^tB$ **.**

Soluție: Deoarece $A\in\mathcal{M}_{2,3}(\boldsymbol{R})$ și $B\in\mathcal{M}_{3,2}(\boldsymbol{R})$, produsul AB se poate efectua**.** Totodată, $AB=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -3 & 5\end{pmatrix}$.

Remarcăm și faptul că produsul ${}^tA\cdot{}^tB$ se poate efectua și că

$${}^tA\cdot{}^tB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 2 & 2 & -2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

16. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ ***și*** $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$**.** ***Calculați*** ${}^t(AB)$**,** ${}^tB\cdot{}^tA$ ***și, apoi, verificați că*** ${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$ **.**

Soluție: Întrucât $AB=\begin{pmatrix}6 & -1 & -9\\ -6 & 14 & 7\\ 2 & 7 & -4\end{pmatrix}$, rezultă că ${}^t(AB)=\begin{pmatrix}6 & -6 & 2\\ -1 & 14 & 7\\ -9 & 7 & -4\end{pmatrix}$. Pe de altă parte, ${}^tA=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$ și ${}^tB=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$, ceea ce implică ${}^tB\cdot{}^tA=\begin{pmatrix}6 & -6 & 2\\ -1 & 14 & 7\\ -9 & 7 & -4\end{pmatrix}$. Deci, ${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$.

17. ***Fie*** $a,\ b,\ c$ ***rădăcinile ecuației*** $x^3-x^2+1=0$ ***și matricea*** $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$**.** ***Arătați că*** $A\cdot {}^tA=I_3$**.**

Soluție: Se arată cu ușurință că $A\cdot {}^tA=\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ca & ab+bc+ca \\ ab+bc+ca & a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ca \\ ab+bc+ca & ab+bc+ca & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix}$. Deoarece $a,\ b,\ c$ sunt rădăcinile ecuației $x^3-x^2+1=0$, rezultă că $a+b+c=1$ și $ab+bc+ca=0$. Remarcând că $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$, deducem că $a^2+b^2+c^2=1$. Drept urmare, $A\cdot {}^tA=I_3$.

18. ***Fie*** $x\in \boldsymbol{R}$ ***și matricea*** $A(x)=\begin{pmatrix} 1+2x & x \\ -2x & 1-x \end{pmatrix}$**.** ***Arătați că*** $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy)$**.**

Soluție: Deoarece $A(x)A(y)=\begin{pmatrix} 1+2x & x \\ -2x & 1-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2y & y \\ -2y & 1-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2(x+y+xy) & x+y+xy \\ -2(x+y+xy) & 1-(x+y+xy) \end{pmatrix}=$
$=A(x+y+xy)$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

19. ***Se consideră mulțimea*** $M=\left\{\begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix}\ \middle|\ x,\ y\in \boldsymbol{Z} \text{ și } x^2-2y^2=1\right\}$**.** ***Arătați că, dacă*** $A,\ B\in M$**,**
atunci $AB\in M$**.**

Soluție: Întrucât $A,\ B\in M$, există $x,\ y,\ z,\ t\in \boldsymbol{Z}$ satisfăcând condițiile $x^2-2y^2=1$ și $z^2-2t^2=1$, astfel încât $A=\begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} z+4t & 2t \\ -7t & z-4t \end{pmatrix}$. Se arată cu ușurință că

$AB=\begin{pmatrix} xz+2yt+4(xt+yz) & 2(xt+yz) \\ -7(xt+yz) & xz+2yt-4(xt+yz) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u+4v & 2v \\ -7v & u-4v \end{pmatrix}$, unde $u=xz+2yt$ și $v=xt+yz$.

Cum $x,\ y,\ z,\ t\in \boldsymbol{Z}$, rezultă că $u,\ v\in \boldsymbol{Z}$. Totodată, $u^2-2v^2=\left(x^2-2y^2\right)\left(z^2-2t^2\right)=1$. Deci, $AB\in M$.

20. ***Se consideră mulțimea*** $M=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ \middle|\ a\in \boldsymbol{Z},\ a \text{ impar}\right\}$**.** ***Arătați că, dacă*** $A,\ B\in M$**,** ***atunci***
$AB\in M$**.**

Soluție: Fie $A,\ B\in M$. Atunci, există $a,\ b\in \boldsymbol{Z}$, numere impare, astfel încât
$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Întrucât $AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+b+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar $a+b+1$ este număr întreg impar, rezultă că $AB\in M$.

21. ***Se consideră mulțimea*** $M=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 & iy \\ 0 & 0 & 0 \\ iy & 0 & x \end{pmatrix}\ \middle|\ x,\ y\in \boldsymbol{R} \text{ și } x^2+y^2=1\right\}$**.** ***Arătați că, dacă*** $A,\ B\in M$**,**
atunci $AB\in M$**.**

Soluție: Deoarece $A,\ B\in M$, există $x,\ y,\ z,\ t\in \boldsymbol{R}$ satisfăcând condițiile $x^2+y^2=1$ și $z^2+t^2=1$, astfel încât $A=\begin{pmatrix} x & 0 & iy \\ 0 & 0 & 0 \\ iy & 0 & x \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} z & 0 & it \\ 0 & 0 & 0 \\ it & 0 & z \end{pmatrix}$. Atunci, $AB=\begin{pmatrix} xz-yt & 0 & i(xt+yz) \\ 0 & 0 & 0 \\ i(xt+yz) & 0 & i(xz-yt) \end{pmatrix}$. Remarcând și faptul că

$$(xz-yt)^2+(xt+yz)^2=x^2z^2+y^2t^2+x^2t^2+y^2z^2=x^2\left(z^2+t^2\right)+y^2\left(z^2+t^2\right)=\left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right)=1,$$

deducem că $AB\in M$**.**

22. ***Se consideră matricea*** $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x & 0 & \sin x\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin x & 0 & \cos x\end{pmatrix}$ $(x\in \boldsymbol{R})$***. Arătați că*** $A(x)A(y)=A(x+y)$***, oricare ar fi*** $x, y\in \boldsymbol{R}$**.**

Soluție: Întrucât $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}\cos x & 0 & \sin x\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin x & 0 & \cos x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos y & 0 & \sin y\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin y & 0 & \cos y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & 0 & \sin(x+y)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(x+y) & 0 & \cos(x+y)\end{pmatrix}=$ $=A(x+y)$ (oricare ar fi $x, y\in \boldsymbol{R}$), cerința enunțului a fost îndeplinită.

23. ***Fie matricea*** $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$***. Determinați toate matricele*** X***, cu proprietatea că*** $AX=XA$**.**

Soluție: Fie $X\in\mathcal{M}_{m,n}(\boldsymbol{C})$. Pentru ca să existe AX, este necesar ca $m=2$, iar pentru ca să existe XA, este necesar ca $n=2$. Prin urmare, $X\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$. Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Din $AX=XA$ deducem că $\begin{pmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{pmatrix}$, de unde $b=0$ și $d=a$, ceea ce arată că soluțiile problemei sunt matricele $\begin{pmatrix}a & 0\\ c & a\end{pmatrix}$, cu a și c arbitrare în $\boldsymbol{C}$.

24. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ***și*** $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$***. Determinați matricele*** X***, având elementele în*** $\boldsymbol{R}$***, cu proprietatea că*** $AX=XB$**.**

Soluție: Fie (m, n) tipul matricei X. Pentru ca să existe matricele AX și XB, este necesar ca $2=m$, respectiv $n=2$. Deci, $X\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$. Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Deoarece $AX=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ c & d\end{pmatrix}$, iar $XB=\begin{pmatrix}2a-b & a\\ 2c-d & c\end{pmatrix}$, egalitatea $AX=XB$ are loc dacă și numai dacă $a+2c=2a-b$, $b+2d=a$ și $d=c$, de unde $b=a-2c$ și $d=c$. Prin urmare, $X=\begin{pmatrix}a & a-2c\\ c & c\end{pmatrix}$, iar a și c sunt numere reale arbitrare.

25. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$***. Determinați o matrice*** $B\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$***, astfel încât*** $AB\neq BA$.

Soluție: Fie $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$. Deoarece $AB=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ a+c & b+d\end{pmatrix}$, iar $BA=\begin{pmatrix}a+b & 2a+b\\ c+d & 2c+d\end{pmatrix}$, pentru ca $AB\neq BA$, este suficient să considerăm $b\neq 2c$. De exemplu, matricea $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ îndeplinește condiția impusă în enunț.

26. ***Fie matricea*** $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$***. Determinați matricele*** $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{Z})$ ***cu proprietatea că*** $AB=O_2$ ***și*** $BA\neq O_2$**.**

Soluție: Deoarece $AB=\begin{pmatrix}x-2z & y-2\\ 2(x-2z) & 2(y-2)\end{pmatrix}$ și $AB=O_2$, rezultă că $x=2z$ și $y=2$, deci $B=\begin{pmatrix}2z & 2\\ z & 1\end{pmatrix}$. Cum, în acest caz, $BA=\begin{pmatrix}2(z+2) & -4(z+2)\\ z+2 & -2(z+2)\end{pmatrix}$, iar $BA\neq O_2$, rezultă că $z\neq -2$. Drept urmare, soluțiile problemei sunt matricele $B=\begin{pmatrix}2z & 2\\ z & 1\end{pmatrix}$, cu $z\in\boldsymbol{Z}\setminus\{-2\}$.

27. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. ***Determinați o matrice*** $B\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$, $B\neq O_3$, ***astfel încât*** $AB=BA=O_3$.

Soluție: Fie $B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$. Întrucât $AB=\begin{pmatrix}-a-d & -b-e & -c-f\\ d & e & f\\ a & b & c\end{pmatrix}$, iar $AB=O_3$, rezultă că $a=b=c=d=e=f=0$, deci $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ g & h & i\end{pmatrix}$. Atunci, $BA=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -g+i & -g+h & 0\end{pmatrix}$, ceea ce, împreună cu $BA=O_3$, conduce la $g=h=i$. Drept urmare, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ k & k & k\end{pmatrix}$ și $k\in\boldsymbol{R}^*$.

28. ***Fie matricele*** $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ ***și*** $B=\begin{pmatrix}-5 & 4 & 2\\ 1 & 7 & -7\end{pmatrix}$. ***Determinați matricea*** X ***cu proprietatea că*** $XA=B$.

Soluție: Fie (m, n) tipul matricei X. Pentru ca produsul XA să aibă sens, este necesar ca $n=3$. Atunci, matricea XA are tipul $(m, 3)$. Deducem imediat că egalitatea $XA=B$ este posibilă numai dacă $m=2$. Prin urmare, matricea X este de tipul $(2, 3)$. Fie $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$ matricea căutată. Rezultă că $XA=\begin{pmatrix}-3a+b-2c & 4a+b-c & -2b+3c\\ -3d+e-2f & 4d+e-f & -2e+3f\end{pmatrix}$. Drept urmare, egalitatea $XA=B$ are loc dacă și numai dacă $-3a+b-2c=-5,\ 4a+b-c=4,\ -2b+3c=2,\ -3d+e-2f=1,\ 4d+e-f=7,\ -2e+3f=-7$. Rezolvând acest sistem, obținem $a=1,\ b=c=2,\ d=1,\ e=2$ și $f=-1$, ceea ce arată că soluția problemei este matricea $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

29. 1) ***Determinați matricele formate numai cu elementele*** 0 ***și*** 1, ***care, înmulțite cu matricea*** $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, ***să dea matricea*** $\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

2) ***Aflați matricele formate numai cu elementele*** 0 ***și*** 1, ***care, înmulțite cu matricea*** $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, ***să dea matricea*** $\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

Soluție: 1) Pentru ca o matrice de tipul $(3, 1)$, prin înmulțire cu o altă matrice, să dea o matrice de tipul $(3, 1)$, trebuie să o înmulțim la stânga cu o matrice de tipul $(3, 3)$; fie $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$ această matrice. Remarcăm faptul că $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_1+2a_2+3a_3\\ b_1+2b_2+3b_3\\ c_1+2c_2+3c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow a_1+2a_2+3a_3=3,$

$b_1+2b_2+3b_3=2$ şi $c_1+2c_2+3c_3=1$. Cum elementele matricei A sunt egale cu 0 sau cu 1, rezultă că $a_1=a_2=1,\ a_3=0$ sau $a_1=a_2=0,\ a_3=1$; $b_1=b_3=0,\ b_2=1$; $c_1=1,\ c_2=c_3=0$. Prin urmare, soluţiile problemei sunt matricele: $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

2) Pentru ca o matrice de tipul (3, 1), prin înmulţire cu o altă matrice, să dea o matrice de tipul (4, 1), este necesar să o înmulţim la stânga cu o matrice de tipul (4, 3); fie $B=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\\t_1&t_2&t_3\end{pmatrix}$ această matrice.

Deoarece $B\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$, rezultă că $x_1+2x_2+3x_3=4,\ y_1+2y_2+3y_3=3,\ z_1+2z_2+3z_3=2$ şi $t_1+2t_2+3t_3=1$.

Cum elementele matricei B sunt 0 sau 1, rezultă că $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=1$; $y_1=y_2=1,\ y_3=0$ sau $y_1=y_2=0\ \ y_3=1$; $z_1=0,\ z_2=1,\ z_3=0$; $t_1=1,\ t_2=t_3=0$. Drept urmare, soluţiile problemei sunt matricele $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

30. ***Fie*** $a, b, c, d\in \boldsymbol{R}$ ***. Determinaţi matricele*** $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ ***cu proprietatea că*** $A^2=O_2$**.**

Soluţie: Întrucât $A^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&d^2+bc\end{pmatrix}$, iar $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, rezultă că egalitatea $A^2=O_2$ are loc dacă şi numai dacă $a^2+bc=0,\ b(a+d)=0,\ c(a+d)=0$ şi $d^2+bc=0$. Dacă $a+d\neq 0$, atunci $b=c=0$, ceea ce implică $a=d=0$. Cum $a=d=0$ contrazice $a+d\neq 0$, situaţia considerată nu poate avea loc. Deci, $a+d=0$. Atunci, $d=-a$, iar $bc=-a^2$. Prin urmare, matricele $\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$, cu $bc=-a^2$ (*a, b* arbitrare în ***R***) sunt soluţiile problemei.

31. ***Fie*** $a, b, c, d\in \boldsymbol{Z}$ ***. Arătaţi că există o infinitate de matrice*** $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ ***cu proprietatea că*** $A^2=I_2$**.**

Soluţie: Deoarece $A^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&d^2+bc\end{pmatrix}$, iar $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, egalitatea $A^2=I_2$ are loc dacă şi numai dacă $a^2+bc=1,\ b(a+d)=0,\ c(a+d)=0$ şi $d^2+bc=1$.

1. Dacă $a+d\neq 0$, atunci $b=c=0$, ceea ce implică $a^2=1$ şi $d^2=1$, de unde $a=d=1$ sau $a=d=-1$ (căci $a+d\neq 0$).

2. Dacă $a+d=0$, atunci luând $b=1$, obţinem $c=1-a^2$ şi $d=-a$. Deci, orice matrice $A=\begin{pmatrix}a&1\\1-a^2&-a\end{pmatrix}$ $(a\in \boldsymbol{Z})$ îndeplineşte condiţia $A^2=I_2$**.**

Astfel, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

32. ***Fie matricea*** $A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$. ***Spunem că matricea*** A ***este involutivă dacă*** $A^2 = I_n$ ***şi că matricea*** A ***este idempotentă dacă*** $A^2 = A$. ***Arătaţi că:***

a) ***dacă matricea*** A ***este involutivă, atunci matricea*** $B = \frac{1}{2}(A + I_n)$ ***este idempotentă;***

b) ***dacă matricea*** A ***este idempotentă, atunci matricea*** $C = 2A - I_n$ ***este involutivă.***

Soluţie: a) Întrucât matricea A este involutivă, rezultă că $A^2 = I_n$. Atunci, $B^2 = \frac{1}{4}(A + I_n)^2 =$ $= \frac{1}{4}(A^2 + 2A + I_n) = \frac{1}{4}(I_n + 2A + I_n) = \frac{1}{2}(A + I_n) = B$, ceea ce arată că matricea B este idempotentă.

b) Deoarece matricea A este idempotentă, rezultă că $A^2 = A$. Atunci, $C^2 = (2A - I_n)^2 = 4A^2 - 4A + I_n^2 =$ $= 4A - 4A + I_n = I_n$, ceea ce arată că matricea C este involutivă.

33. ***Se consideră numerele reale*** $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h$ ***şi matricele*** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ ***cu proprietatea că*** $A^2 = B$. ***Arătaţi că, dacă numerele*** $a,\ b,\ c,\ d$ ***sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele*** $f - e,\ g - f,\ h - g$ ***sunt în progresie aritmetică.***

Soluţie: Evident, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$. Cum $A^2 = B$, rezultă că $a^2 + bc = e,\ b(a + d) = f,$ $c(a + d) = g$ şi $bc + d^2 = h$. Deoarece $a,\ b,\ c,\ d$ sunt în progresie aritmetică, există $m,\ r \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $a = m - 3r,\ b = m - r,\ c = m + r$ şi $d = m + 3r$. Atunci, $e = 2m^2 - 6mr + 8r^2,\ f = 2m^2 - 2mr$, $g = 2m^2 + 4mr,\ h = 2m^2 + 6mr + 8r^2$, de unde $f - e = 4mr - 8r^2,\ g - f = 4mr$ şi $h - g = 4mr + 8r^2$, ceea ce arată că numerele $f - e,\ g - f,\ h - g$ sunt în progresie aritmetică (de raţie $8r^2$).

34. ***Fie*** $x,\ y \in \boldsymbol{R}$ ***şi matricele*** $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ***Determinaţi*** x ***şi*** y, ***ştiind că*** $A^2 + A = 4B$.

Soluţie: Deoarece $A^2 = \begin{pmatrix} x^2 + y & xy + 2y \\ x + 2 & y + 4 \end{pmatrix}$, rezultă că $A^2 + A = \begin{pmatrix} x^2 + y + x & xy + 3y \\ x + 3 & y + 6 \end{pmatrix}$. Remarcând faptul că $A^2 + A = 4B$, deducem că $\begin{pmatrix} x^2 + y + x & xy + 3y \\ x + 3 & y + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, ceea ce are loc dacă şi numai dacă $x^2 + y + x = 0$, $xy + 3y = -8,\ x + 3 = 4$ şi $y + 6 = 4$, de unde $x = 1$ şi $y = -2$.

35. ***Fie*** $a,\ b,\ c,\ d \in \boldsymbol{R}$. ***Determinaţi matricele*** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ***cu proprietatea că:***

$$A^2 - 2aA + (a^2 + b^2)I_2 = O_2.$$

Soluţie: Întrucât $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$, $2aA = \begin{pmatrix} 2a^2 & 2ab \\ 2ac & 2ad \end{pmatrix}$ şi $(a^2 + b^2)I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$, rezultă că $A^2 - 2aA + (a^2 + b^2)I_2 = \begin{pmatrix} b(b + c) & b(d - a) \\ c(d - a) & (a - d)^2 + b(b + c) \end{pmatrix}$. Ţinând seama şi de faptul că $A^2 - 2aA + (a^2 + b^2)I_2 = O_2$, deducem că $b(b + c) = 0,\ b(d - a) = 0,\ c(d - a) = 0,\ (a - d)^2 + b(b + c) = 0$. Cum $b(b + c) = 0$, rezultă că $b = 0$ sau $b + c = 0$. Dacă $b = 0$, atunci $(a - d)^2 = 0$, de unde $d = a$. Dacă $b + c = 0$, atunci $(a - d)^2 = 0$, de unde $d = a$. Drept urmare, matricele căutate sunt $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ($a,\ b$ şi c oarecare în $\boldsymbol{R}$).

36. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$. ***Arătați că*** $A^2+A+I_2=O_2$ ***dacă şi numai dacă*** $a+d=-1$ ***şi*** $ad-bc=1$**.**

Soluție: Se arată cu uşurință că $A^2+A+I_2=\begin{pmatrix} a^2+bc+a+1 & b(a+d+1) \\ c(a+d+1) & d^2+bc+d+1 \end{pmatrix}$. Prin urmare, $A^2+A+I_2=O_2$ dacă şi numai dacă $a^2+bc+a+1=0,\ \ b(a+d+1)=0,\ \ c(a+d+1)=0$ şi $d^2+bc+d+1=0$. Dacă $b=0$, atunci $a^2+a+1=0$ (căci $a^2+bc+a+1=0$). Cum această egalitate nu este posibilă în $\boldsymbol{R}$, rezultă că $b\neq 0$, ceea ce impune $a+d+1=0$ (fiindcă $b(a+d+1)=0$), de unde $a+d=-1$. Drept urmare, $ad-bc=a(-a-1)-bc=-a(a+1)-bc=-(-bc-1)-bc=1$ (căci $a^2+a+1+bc=0$). Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

37. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***şi*** $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$.

a) ***Arătați că, dacă*** $AX=XA$***, atunci*** $c=0$ ***şi*** $d=a$**.**

b) ***Determinați matricea*** X***, ştiind că*** $X^3=A$**.**

Soluție: a) Deoarece $AX=\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $XA=\begin{pmatrix} a & 3a+b \\ c & 3c+d \end{pmatrix}$, iar $AX=XA$, rezultă că $a+3c=a$, $b+3d=3a+b$ şi $d=3c+d$, de unde $c=0$ şi $d=a$.

b) Fie $X\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ astfel încât $X^3=A$. Având în vedere că $X^4=X^3X=AX$ şi, totodată, $X^4=XX^3=XA$, deducem că $AX=XA$, de unde $c=0$ şi $d=a$. Deci, $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Se arată cu uşurință că $X^3=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$. Cum $X^3=A$, rezultă că $a^3=1$ şi $3a^2b=3$, de unde $a=1$ şi $b=1$ (căci $a,\ b\in\boldsymbol{R}$).

38. ***Fie matricea*** $A=\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$**.** ***Determinați matricele*** $X\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ ***cu proprietatea că*** $X^2=A$**.**

Soluția I: Fie $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ $(x,\ y,\ z,\ t\in\boldsymbol{R})$ matricea ce satisface egalitatea din enunț. Întrucât $X^2=\begin{pmatrix} x^2+yz & y(x+t) \\ z(x+t) & yz+t^2 \end{pmatrix}$, rezultă că $x^2+yz=7,\ \ y(x+t)=18,\ \ z(x+t)=-4,\ \ yz+t^2=7$. Scăzând ecuațiile $x^2+yz=7$ şi $yz+t^2=7$ membru cu membru, obținem $(x-t)(x+t)=0$, de unde $x=t$ (fiindcă $x+t\neq 0$). Astfel, ecuațiile $y(x+t)=18$ şi $z(x+t)=-4$, conduc la $y=\frac{9}{x}$, respectiv $z=-\frac{2}{x}$. Cum $x^2+yz=7$, rezultă că $x^2-\frac{18}{x^2}=7$, ceea ce este totuna cu $x^4-7x^2-18=0$. Rezolvând ultima ecuație, obținem $x=-3$ sau $x=3$ (căci $x\in\boldsymbol{R}$). Dacă $x=-3$, atunci $y=-3,\ z=\frac{2}{3}$ şi $t=-3$, iar dacă $x=3$, atunci $y=3,\ z=-\frac{2}{3}$ şi $t=3$. Drept urmare, soluțiile problemei sunt matricele $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ \frac{2}{3} & -3 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -\frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix}$.

Soluția a II-a: Fie matricea $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,\ b,\ c,\ d\in \boldsymbol{R})$ o soluție a problemei. Deoarece $X^2X=XX^2$, iar $X^2=A$, rezultă $AX=XA$, de unde $\begin{pmatrix} 7a+18c & 7b+18d \\ -4a+7c & -4b+7d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7a-4b & 18a+7b \\ 7c-4d & 18c+7d \end{pmatrix}$, ceea ce conduce la $a=d$ şi $b=-\dfrac{9c}{2}$. Drept urmare, $X=\begin{pmatrix} a & -\dfrac{9c}{2} \\ c & a \end{pmatrix}$, iar $X^2=\begin{pmatrix} a^2-\dfrac{9c^2}{2} & -9ac \\ 2ac & a^2-\dfrac{9c^2}{2} \end{pmatrix}$. Cum $X^2=\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$, rezultă că $a^2-\dfrac{9c^2}{2}=7$ şi $ac=-2$, de unde $a=3,\ c=-\dfrac{2}{3}$ sau $a=-3,\ c=\dfrac{2}{3}$ (căci $a,\ c\in \boldsymbol{R}$). Deducem imediat că soluțiile problemei sunt matricele $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -\dfrac{2}{3} & 3 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ \dfrac{2}{3} & -3 \end{pmatrix}$.

39. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ***şi mulțimea*** $M=\left\{X\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R}) \mid AX=XA\right\}$**.**

a) ***Arătați că*** $XA^2=A^2X$ ***, oricare ar fi*** $X\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$**.**

b) ***Găsiți o matrice*** $B\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$**,** ***astfel încât*** $AB\neq BA$**.**

c) ***Demonstrați că*** $aI_2+bA\in M$ ***, oricare ar fi*** $a,\ b\in \boldsymbol{R}$**.**

d) ***Arătați că, dacă*** $X\in M$ ***, atunci există*** $a,\ b\in \boldsymbol{R}$ ***astfel încât*** $X=(a-b)I_2+bA$**.**

Soluție: a) Deoarece $A^2=O_2$, rezultă că $A^2X=O_2$ şi $XA^2=O_2$, de unde $A^2X=XA^2$, oricare ar fi $X\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$.

b) Fie matricea $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Evidențiind faptul că $AB=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, iar $BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, deducem că $AB\neq BA$.

c) Evident, $A\left(aI_2+bA\right)=aA+bA^2=aA+bO_2=aA$, iar $\left(aI_2+bA\right)A=aA+bA^2=aA$. Deci, $aI_2+bA\in M$.

d) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M$. Cum $AX=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(a+c) & -(b+d) \end{pmatrix}$ şi $XA=\begin{pmatrix} a-b & a-b \\ c-d & c-d \end{pmatrix}$, iar $AX=XA$ (căci $X\in M$), rezultă că $a+c=a-b,\ b+d=a-b,\ -(a+c)=c-d$ şi $-(b+d)=c-d$, ceea ce conduce la $c=-b$ şi $d=a-2b$. Drept urmare, $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-2b \end{pmatrix}$. Ținând seama şi de faptul că $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b+b & b \\ -b & a-b-b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix}=(a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=(a-b)I_2+$ $+bA$, deducem că există $a,\ b\in \boldsymbol{R}$ astfel încât $X=(a-b)I_2+bA$.

40. ***Se consideră matricea*** $E=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ***şi mulțimea*** $M=\left\{A\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R}) \mid AE=EA\right\}$**.**

1^0 ***Arătați că:***

a) ***pentru orice matrice*** $A\in M$ ***, există*** $a,\ b\in \boldsymbol{R}$ ***astfel încât*** $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$**;**

b) $E^2=-I_2$ ***şi orice matrice*** $A\in M$ ***se poate scrie unic sub forma*** $A=aI_2+bE\ \left(a,\ b\in \boldsymbol{R}\right)$**;**

c) ***dacă*** $A,\ B\in M$ ***, atunci*** $A+B\in M$ ***şi*** $AB\in M$**.**

2^0 ***Rezolvați în*** M ***ecuația*** $X^2=-I_2$**.**

Soluție: 1^0 **a)** Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$. Dacă $A\in M$, atunci $AE=EA$. Cum $AE=\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$, iar $EA=\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$, rezultă că $c=-b$ și $d=a$. Deci, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

b) Deoarece $E^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, rezultă că $E^2=-I_2$. Fie $A\in M$. Atunci, există $a,\ b\in \boldsymbol{R}$ astfel încât $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Având în vedere că $aI_2+bE=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, deducem că $A=aI_2+bE$.

c) Fie $A,\ B\in M$. Atunci, există $a,\ b,\ c,\ d\in \boldsymbol{R}$ astfel încât $A=aI_2+bE$ și $B=cI_2+dE$. Rezultă că $A+B=(a+c)I_2+(b+d)E$ și $AB=acI_2+(ad+bc)E+bdE^2=acI_2+(ad+bc)E-bdI_2=(ac-bd)I_2+$ $+(ad+bc)E$. Remarcând și faptul că $a+c,\ b+d,\ ac-bd,\ ad+bc$ sunt numere reale, deducem că $A+B\in M$ și $AB\in M$.

2^0 Fie $X=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\in M$. Deoarece $X^2=\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$, egalitatea $X^2=-I_2$ are loc dacă și numai dacă $x^2-y^2=-1$ și $xy=0$, de unde $x=0$ și $y=1$, sau $x=0$ și $y=-1$. Deci, matricele $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sunt soluțiile ecuației considerate.

41. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. ***Determinați matricele*** $X\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$, ***cu proprietatea că*** $X^3-3X=A$.

Soluție: Fie matricea $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,\ b,\ c,\ d\in \boldsymbol{R})$ o soluție a problemei. Întrucât $\left(X^3-3X\right)X=$ $=X\left(X^3-3X\right)$, iar $X^3-3X=A$, rezultă că $AX=XA$, de unde $\begin{pmatrix} -2a & -2b \\ -4a+2c & -4b+2d \end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} -2a-4b & 2b \\ -2c-4d & 2d \end{pmatrix}$, ceea ce impune $b=0$ și $c=a-d$. Drept urmare, $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-d & d \end{pmatrix}$, iar $X^3=\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ a^3-d^3 & d^3 \end{pmatrix}$, ceea ce implică $X^3-3X=\begin{pmatrix} a^3-3a & 0 \\ a^3-d^3-3(a-d) & d^3-3d \end{pmatrix}$. Cum $X^3-3X=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, rezultă că $a^3-3a=-2,\ a^3-d^3-3(a-d)=-4$ și $d^3-3d=2$. Rezolvând acest sistem în necunoscutele a și d, deducem că $a=1$ sau $a=-2$, iar $d=-1$ sau $d=2$. Prin urmare, soluțiile problemei sunt matricele: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

42. ***Determinați matricele*** $X\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{Z})$ ***cu proprietatea că*** $X^2={}^t(2X)$.

Soluție: Fie $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ $(x,\ y,\ z,\ t\in \boldsymbol{Z})$ matricea căutată. Atunci, egalitatea din enunț conduce la $\begin{pmatrix} x^2+yz & y(x+t) \\ z(x+t) & yz+t^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 2z \\ 2y & 2t \end{pmatrix}$, de unde $x^2+yz=2x,\ y(x+t)=2z,\ z(x+t)=2y,\ yz+t^2=2t$.

1) Dacă $y=0$, atunci $z=0$, ceea ce implică $x^2=2x$ şi $t^2=2t$. Prin urmare,în cazul considerat, $x=0$ sau $x=2$, iar $t=0$ sau $t=2$. Rezultă că matricele $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ sunt soluţii ale problemei.

2) Fie $yz\neq 0$. Atunci, înmulţind egalităţile $y(x+t)=2z$ şi $z(x+t)=2y$ membru cu membru şi simplificând egalitatea obţinută prin yz, deducem că $(x+t)^2=4$, deci $x+t=-2$ sau $x+t=2$.

Dacă $x+t=-2$, atunci $y=-z$, ceea ce, împreună cu $x^2+yz=2x$, conduce la $(x-1)^2=y^2+1$. Cum y^2+1 nu este pătrat perfect (căci $y\neq 0$), ultima egalitate nu este posibilă, deci $x+t=-2$ nu convine.

Dacă $x+t=2$, atunci $y=z$, ceea ce împreună cu $x^2+yz=2x$, conduce la $(x-1)^2=1-y^2$. Deoarece $1-y^2\geq 0$ (fiindcă $(x-1)^2\geq 0$), rezultă că $y\in[-1,\,1]$, de unde $y\in\{-1,\,1\}$ (căci $y\in\boldsymbol{Z}$ şi $y\neq 0$). Drept urmare, $(x-1)^2=0$, de unde $x=1$, ceea ce implică $t=1$. Rezultă că şi matricele $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ sunt soluţii ale problemei.

43. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}0&x&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ ***şi*** $B=\begin{pmatrix}4&-6&0\\-2&3&-1\\-2&2&0\end{pmatrix}$. ***Determinaţi*** $x\in\boldsymbol{R}$, ***ştiind că*** $A^2-3A+I_3=B$.

Soluţie: Deoarece

$$A^2=\begin{pmatrix}x+1&0&x+1\\1&x&2\\1&x&2\end{pmatrix},\quad \text{iar}\quad 3A=\begin{pmatrix}0&3x&3\\3&0&3\\3&0&3\end{pmatrix},\quad \text{rezultă că}\quad A^2-3A+I_3=\begin{pmatrix}x+2&-3x&x-2\\-2&x+1&-1\\-2&x&0\end{pmatrix}.$$

Prin urmare, egalitatea $A^2-3A+I_3=B$ are loc dacă şi numai dacă $x+2=4$, $-3x=-6$, $x-2=0$, $x+1=3$ şi $x=2$. Deci, $x=2$.

44. ***Fie matricea*** $A=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. ***Arătaţi că există*** $a,\ b\in\boldsymbol{Z}$ ***astfel încât*** $A^3=aA^2+bA$.

Soluţie: Se arată cu uşurinţă că

$$A^2=\begin{pmatrix}3&-5&-2\\-2&3&1\\-1&2&1\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}8&-13&-5\\-5&8&3\\-3&5&2\end{pmatrix}\ \text{şi}\ aA^2+bA=\begin{pmatrix}3a+b&-5a-2b&-2a-b\\-2a-b&3a+b&a\\-a&2a+b&a+b\end{pmatrix}.$$

Drept urmare, egalitatea $A^3=aA^2+bA$ are loc dacă şi numai dacă $3a+b=8$, $5a+2b=13$, $2a+b=5$, $a=3$ şi $a+b=2$. Rezolvând acest sistem (în necunoscutele a şi b), constatăm că sistemul este compatibil şi că perechea $(3,\,-1)$ este soluţia sa. Prin urmare, $A^3=3A^2-A$.

45. ***Arătaţi că funcţia*** $f:\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})\to\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$, $f(X)=X^3-2X^2-X+2I_3$ ***nu este injectivă.***

Soluţie: Remarcând că $f(X)=X^2X-2X^2I_3-\left(X-2I_3\right)=X^2\left(X-2I_3\right)-I_3\left(X-2I_3\right)=$

$=\left(X^2-I_3\right)\left(X-2I_3\right)=\left(X^2-I_3^2\right)\left(X-2I_3\right)=\left(X-I_3\right)\left(X+I_3\right)\left(X-2I_3\right)$, deducem că $f(I_3)=O_3$ şi $f(2I_3)=O_3$, de unde $f(I_3)=f(2I_3)$. Cum $I_3\neq 2I_3$, rezultă că funcţia f nu este injectivă.

46. ***Fie matricele*** $A,\ B\in\mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$. ***Arătaţi că, dacă*** $AB=BA$, ***atunci*** $(A-B)(A+B)(A^2+B^2)=A^4-B^4$, $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$ ***şi*** $(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$.

Soluție: Evident, $(A-B)(A+B)(A^2+B^2)=(A^2+AB-BA-B^2)(A^2+B^2)=(A^2-B^2)(A^2+B^2)=$ $=A^4+A^2B^2-B^2A^2-B^4=A^4+(AB)^2-(BA)^2-B^4=A^4-B^4$. Remarcând faptul că $(A-B)(A^2+AB+B^2)=$ $=A^3+A^2B+AB^2-BA^2-BAB-B^3$ și că $BA^2=(BA)A=(AB)A=A(BA)=A(AB)=A^2B$, iar $BAB=$ $=(BA)B=(AB)B=A(BB)=AB^2$, deducem că $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$.
Ultima egalitate se demonstrează la fel ca cea anterioară ei.

47. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ ***și*** $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$**.**

a) ***Calculați*** $A+B,\ A-B,\ AB,\ BA,\ A^2$ ***și*** B^2**.**

b) ***Fără a calcula*** A^3 ***și*** B^3**,** ***determinați*** $A^4-B^4,\ A^3+B^3$ ***și*** A^3-B^3**.**

Soluție: a) Se arată cu uşurință că:
$A+B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$, $AB=BA=O_3$, $A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ și $B^2=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&0&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$.

b) Cum $AB=BA=O_3$, rezultă că $A^4-B^4=(A^2-B^2)(A^2+B^2)$, $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)=$ $=(A+B)(A^2+B^2)$, $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)=(A-B)(A^2+B^2)$.

Remarcând şi faptul că $A^2-B^2=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&2&0\\3&0&-1\end{pmatrix}$, iar $A^2+B^2=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$, deducem că:

$A^4-B^4=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&2&0\\3&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&0&10\\0&4&0\\10&0&-6\end{pmatrix}$, $A^3+B^3=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&-4\\2&0&2\\-4&2&4\end{pmatrix}$

şi $A^3-B^3=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&2&4\\2&0&2\\4&2&-4\end{pmatrix}$.

48. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ ***și*** $B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$**.**

a) ***Arătați că*** $AB=BA=A+B$**.**

b) ***Fără a calcula*** A^2 ***și*** B^2**,** ***demonstrați că*** $A^2B-AB^2=A^2-B^2$ ***și*** $A^3B-(AB)^2+AB^3=A^3+B^3$**.**

Soluție: a) Deoarece $AB=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-2&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-2&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$ și $A+B=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-2&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$, rezultă că $AB=BA=A+B$.

b) Ținând seama de cele stabilite anterior, deducem că $A^2B-AB^2=A(AB)-AB^2=A(BA)-AB^2=$ $=(AB)A-(AB)B=AB(A-B)=(A+B)(A-B)=A^2-B^2$. Cum $A^3B=A^2(AB)=A^2(BA)=(A^2B)A=$ $=[A(AB)]A=[A(BA)]A=[(AB)A]A=(AB)A^2$, iar $AB^3=(AB)B^2$, rezultă că $A^3B-(AB)^2+AB^3=$ $=(AB)A^2-(AB)^2+(AB)B^2=AB(A^2-AB+B^2)=(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$.

49. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$**.**

a) ***Fie*** $X \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{C})$. ***Arătați că, dacă*** $AX = XA$, ***atunci*** $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $(a,\ b,\ c \in \boldsymbol{C})$.

b) ***Determinați matricea*** $X \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ ***cu proprietatea că*** $X^3 = A$.

c) ***Câte matrice*** $X \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{C})$ ***verifică egalitatea*** $X^3 = A$ **?**

Soluție: a) Fie $X = \begin{pmatrix} k & m & n \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix}$. Deoarece $AX = \begin{pmatrix} 8k & 8m & 8n \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{pmatrix}$, $XA = \begin{pmatrix} 8k & m & -n \\ 8p & q & -r \\ 8x & y & -z \end{pmatrix}$, iar $AX = XA$, rezultă că $m = 0,\ n = 0,\ p = 0,\ r = 0,\ x = 0$ şi $y = 0$. Notând $k = a,\ q = b$ şi $z = c$, conchidem că $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

b) Fie $X \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ astfel încât $X^3 = A$. Remarcând că $X^4 = X^3X = AX$ şi, totodată, $X^4 = XX^3 = XA$, deducem că $AX = XA$. Deci, $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Rezultă că $X^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}$, ceea ce, împreună cu $X^3 = A$, conduce la $a^3 = 8,\ b^3 = 1,\ c^3 = -1$, de unde $a = 2,\ b = 1,\ c = -1$ (căci $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$). Drept urmare, $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Fie $X \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{C})$ astfel încât $X^3 = A$. Repetând raționamentul de la b), deducem că $a^3 = 8,\ b^3 = 1$ şi $c^3 = -1$. Cum $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{C}$, fiecare dintre elementele $a,\ b$ şi c poate lua câte trei valori. Prin urmare, există $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ de matrice care îndeplinesc condiția din enunț.

50. ***Se consideră matricele*** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = I_2 + A + A^2 + A^3$ ***şi*** $C = I_2 + A + A^2 + ... + A^{2007}$.

a) ***Arătați că*** $A^2 = -I_2$ ***şi, apoi, determinați cea mai mică valoare a lui*** $n \in \boldsymbol{N}^*$ ***pentru care*** $A^n = I_2$.

b) ***Demonstrați că*** $B = C$.

Soluție: a) Evident, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$. Cum $A^3 = A^2A = -I_2A = -A$, iar $A^4 = A^3A = -AA = -A^2 = I_2$, rezultă că cea mai mică valoare a lui $n \in \boldsymbol{N}^*$ pentru care $A^n = I_2$ este 4.

b) Ținând seama de cele stabilite anterior, deducem că $B = I_2 + A + (-I_2) + (-A) = O_2$. Având în vedere că $C = (I_2 + A + A^2 + A^3) + A^4(I_2 + A + A^2 + A^3) + ... + A^{2004}(I_2 + A + A^2 + A^3) = B(I_2 + A^4 + ... + A^{2004}) = O_2$, conchidem că $B = C$.

51. ***Se consideră matricea*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. ***Arătați că*** $A^n \neq I_2$, ***oricare ar fi*** $n \in \boldsymbol{N}^*$.

Soluție: Faptul că $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ şi $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$, ne sugerează că $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, iar $a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n$ sunt numere reale strict pozitive, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Folosind metoda inducției matematice, arătăm că

această propoziție este adevărată. Remarcând faptul că $b_n \neq 0$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, deducem că $A^n \neq I_2$ oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$.

52. ***Fie*** ε ***una dintre rădăcinile cubice complexe ale unității și matricea*** $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$. ***Determinați matricea*** $B = I_2 + A + A^2 + A^3 + ... + A^{99}$.

Soluție: Se arată cu ușurință că $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ și că $A^3 = I_2$. Drept urmare, $A^{3k} = I_2$, $A^{3k+1} = A^{3k}A = A$ și $A^{3k+2} = A^{3k}A^2 = A^2$ $(k \in \boldsymbol{N}^*)$. Evidențiem și faptul că

$$B = I_2 + A + A^2 + A^3(I_2 + A + A^2) + A^6(I_2 + A + A^2) + ... + A^{96}(I_2 + A + A^2) + A^{99} =$$

$$= I_2 + A + A^2 + I_2(I_2 + A + A^2) + I_2(I_2 + A + A^2) + ... + I_2(I_2 + A + A^2) + I_2 = 33(I_2 + A + A^2) + I_2 .$$

Cum $I_2 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1+2\varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (căci $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$), rezultă că $B = \begin{pmatrix} 100 & 33+66\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

53. ***Fie*** $a, b \in \boldsymbol{R}$ ***și matricea*** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$. ***Calculați*** A^n **(**$n \in \boldsymbol{N}^*$**).**

Soluție: Remarcând faptul că $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab+b^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)^2 - a^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$, iar $A^3 = A^2 \cdot A =$ $= \begin{pmatrix} a^3 & (a+b)^3 - a^3 \\ 0 & (a+b)^3 \end{pmatrix}$ ni se sugerează că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, ceea ce se demonstrează prin inducție matematică.

54. ***Se consideră matricea*** $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. ***Calculați*** A^n **(**$n \in \boldsymbol{N}^*$**).**

Soluție: Se arată cu ușurință că $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -12 & -11 \end{pmatrix}$. Faptul că $A^2 = \begin{pmatrix} 1+3\cdot 2 & 3\cdot 2 \\ -3\cdot 2 & 1-3\cdot 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1+3\cdot 3 & 3\cdot 3 \\ -3\cdot 3 & 1-3\cdot 3 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1+3\cdot 4 & 3\cdot 4 \\ -3\cdot 4 & 1-3\cdot 4 \end{pmatrix}$ implică $A^n = \begin{pmatrix} 1+3n & 3n \\ -3n & 1-3n \end{pmatrix}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Fie $P(n)$ această propziție. Evident, $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $A^k = \begin{pmatrix} 1+3k & 3k \\ -3k & 1-3k \end{pmatrix}$. Cum

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1+3k & 3k \\ -3k & 1-3k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3k & 3k+3 \\ -3k-3 & -2-3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3(k+1) & 3(k+1) \\ -3(k+1) & 1-3(k+1) \end{pmatrix},$$

rezultă că $P(k+1)$ este adevărată. Deci, $P(n)$ este adevărată și, deci, $A^n = \begin{pmatrix} 1+3n & 3n \\ -3n & 1-3n \end{pmatrix}$, $n \in \boldsymbol{N}^*$.

55. ***Fie*** $a \in \boldsymbol{R}$ ***și matricea*** $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$.

a) ***Arătați că*** $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$**,** ***oricare ar fi*** $a, b \in \boldsymbol{R}$**.**

b) ***Demonstrați că*** $X^n(1) = X(2^n - 1)$**,** ***oricare ar fi*** $n \in \boldsymbol{N}^*$**.**

Soluție: **a)** Se observă cu ușurință că $X(a)=I_2+aA$, unde $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$. Deoarece $X(a)X(b)=$

$=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA^2$, iar $A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}=A$, rezultă că $X(a)X(b)=I_2+(a+b+ab)A$,

ceea ce arată că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$.

b) Fie $P(n)$ propoziția: $X^n(1)=X(2^n-1)$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$. Evident, $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $X^k(1)=X(2^k-1)$ $(k\in\boldsymbol{N}^*)$. Remarcând că $X^{k+1}(1)=X^k(1)\cdot X(1)=X(2^k-1+1+2^k-1)=X(2^{k+1}-1)$, deducem că $P(k+1)$ este adevărată. Deci, $P(n)$ este adevărată și, deci, cerința enunțului este îndeplinită.

56. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ ***și*** $C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$***. Fie*** $D=ABC$**.**

a) ***Arătați că*** $AC=CA=I_2$**.**

b) ***Calculați*** B^n ***(*** $n\in\boldsymbol{N}^*$***).***

c) ***Arătați că*** $D^n=AB^nC$***, oricare ar fi*** $n\in\boldsymbol{N}^*$ ***și, apoi, calculați*** D^n**.**

Soluție: **a)** Întrucât $AC=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $CA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, rezultă că $AC=CA=I_2$.

b) Se arată cu ușurință că $B^2=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$, $B^3=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -6 & -5\end{pmatrix}$ și $B^4=\begin{pmatrix}9 & 8\\ -8 & -7\end{pmatrix}$. Remarcând faptul că

$B^2=\begin{pmatrix}1+2\cdot 2 & 2\cdot 2\\ -2\cdot 2 & 1-2\cdot 2\end{pmatrix}$, $B^3=\begin{pmatrix}1+2\cdot 3 & 2\cdot 3\\ -2\cdot 3 & 1-2\cdot 3\end{pmatrix}$ și $B^4=\begin{pmatrix}1+2\cdot 4 & 2\cdot 4\\ -2\cdot 4 & 1-2\cdot 4\end{pmatrix}$, ni se sugerează că

$B^n=\begin{pmatrix}1+2n & 2n\\ -2n & 1-2n\end{pmatrix}$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$, ceea ce se demonstrează prin inducție matematică.

c) Fie $P(n)$ propoziția: $D^n=AB^nC$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$. Evident, $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $D^k=AB^kC$ $(k\in\boldsymbol{N}^*)$. Atunci, $D^{k+1}=D^kD=(AB^kC)(ABC)=$

$=AB^k(CA)BC=AB^kI_2BC=A(B^kB)C=AB^{k+1}C$, ceea ce arată că și $P(k+1)$ este adevărată. Deci, $P(n)$ este adevărată.

Deoarece $AB^n=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+2n & 2n\\ -2n & 1-2n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2n+2 & 2n+1\\ 4n+5 & 4n+3\end{pmatrix}$, iar $(AB^n)C=\begin{pmatrix}2n+2 & 2n+1\\ 4n+5 & 4n+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1-4n & 2n\\ -8n & 1+4n\end{pmatrix}$, rezultă că $D^n=\begin{pmatrix}1-4n & 2n\\ -8n & 1+4n\end{pmatrix}$.

57. ***Fie matricele*** $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ ***și*** $B=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 3 & -2\end{pmatrix}$***. Arătați că*** $A^n-B^n=(2^n-1)(A-B)$***, oricare ar fi*** $n\in\boldsymbol{N}^*$**.**

Soluție: Fie propoziția $P(n)$: $A^n-B^n=(2^n-1)(A-B)$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$ (A și B fiind matricele considerate în enunțul problemei). Remarcăm, mai întâi, că $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că $P(k)$ este adevărată pentru orice $n=\overline{1,k}$ $(k\in\boldsymbol{N}^*,\ k\geq 2)$; rezultă că $A^{k-1}-B^{k-1}=(2^{k-1}-1)(A-B)$ și $A^k-B^k=(2^k-1)(A-B)$. Întrucât, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$, are loc egalitatea $X^2-(a+d)X+(ad-bc)I_2=O_2$, rezultă că $A^2=3A-2I_2$ și $B^2=3B-2I_2$. Înmulțind prima dintre ultimele două egalități cu A^{k-1} și pe a doua cu B^{k-1}, obținem $A^{k+1}=3A^k-2A^{k-1}$, respectiv $B^{k+1}=3B^k-2B^{k-1}$, de unde $A^{k+1}-B^{k+1}=3(A^k-B^k)-2(A^{k-1}-B^{k-1})$. Ținând seama de cele stabilite anterior,

deducem că $A^{k+1}-B^{k+1}=3(2^k-1)(A-B)-2(2^{k-1}-1)(A-B)$, de unde $A^{k+1}-B^{k+1}=(2^{k+1}-1)(A-B)$, deci $P(k+1)$ este adevărată. Drept urmare, $P(n)$ este adevărată, ceea ce trebuia să demonstrăm.

58. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$***. Determinați*** $a,\ b\in \boldsymbol{R}$***, astfel încât*** $A^2=aA+bI_2$***. Demonstrați, apoi, că*** $A^n=nA+(1-n)I_2$***, oricare ar fi*** $n\in \boldsymbol{N}^*$**.**

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că $A^2=\begin{pmatrix}9 & 8\\ -8 & -7\end{pmatrix}$. Cum $aA+bI_2=\begin{pmatrix}5a+b & 4a\\ -4a & -3a+b\end{pmatrix}$, egalitatea $A^2=aA+bI_2$ are loc dacă şi numai dacă $5a+b=9,\ 4a=8$ şi $-3a+b=-7$, de unde $a=2$ şi $b=-1$. Deci, $A^2=2A-I_2$.

Fie propoziția $P(n)$: $A^n=nA+(1-n)I_2$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Evident, $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $A^k=kA+(1-k)I_2$ ($k\in \boldsymbol{N}^*$). Atunci, $A^{k+1}=kA^2+(1-k)A=$ $=k(2A-I_2)+(1-k)A=(k+1)A+(-k)I_2$, ceea ce arată că şi $P(k+1)$ este adevărată. În consecință, $P(n)$ este adevărată, ceea ce trebuia demonstrat.

59. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$***. Calculați*** A^n **(**$n\in \boldsymbol{N}^*$**).**

Soluție: Deoarece $A=2\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}$, rezultă că $A^n=2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{6} & -\sin\frac{n\pi}{6}\\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6}\end{pmatrix}$.

60. ***Determinați matricele*** $X=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ ***cu proprietatea că*** $X^n=I_2$ **(**$n\in \boldsymbol{N}^*$**).**

Soluție: Întrucât O_2 nu verifică egalitatea considerată, rezultă că $x\neq 0$ sau $y\neq 0$. Fie $r=\sqrt{x^2+y^2}$ (evident, $r>0$). Remarcăm şi faptul că $X=r\begin{pmatrix}\frac{x}{r} & \frac{y}{r}\\ -\frac{y}{r} & \frac{x}{r}\end{pmatrix}$. Deoarece $\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1$, există $\alpha\in[0,\ 2\pi)$ astfel încât $\frac{x}{r}=\cos\alpha$ şi $\frac{y}{r}=\sin\alpha$. Drept urmare, $X=r\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, iar $X^n=r^n\begin{pmatrix}\cos n\alpha & \sin n\alpha\\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$. Astfel, egalitatea din enunț conduce la $\begin{pmatrix}r^n\cos n\alpha & r^n\sin n\alpha\\ -r^n\sin n\alpha & r^n\cos n\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, de unde $r^n\cos n\alpha=1$ şi $r^n\sin n\alpha=0$. Cum $\cos n\alpha>0$ şi $\sin n\alpha=0$, rezultă că $\alpha=\frac{2k\pi}{n},\ k=\overline{0,n-1}$ (căci $0\le\alpha<2\pi$). Pentru $\alpha=\frac{2k\pi}{n}$, egalitatea $r^n\cos n\alpha=1$ conduce la $r^n=1$, de unde $r=1$ (fiindcă $r\in \boldsymbol{R}_+^*$). Ca urmare a celor stabilite anterior, matricele căutate sunt $\begin{pmatrix}\cos\frac{2k\pi}{n} & \sin\frac{2k\pi}{n}\\ -\sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n}\end{pmatrix}$, $k=\overline{0,n-1}$.

61. ***Fie*** $x \in \boldsymbol{R}$ ***şi matricea*** $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x & 2\sin x \\ -\sin x & \cos x - \sin x \end{pmatrix}$.

a) ***Arătaţi că*** $A(x)A(y) = A(x+y)$ **,** ***oricare ar fi*** $x,\ y \in \boldsymbol{R}$ **.**

b) ***Calculaţi*** $A^n(x)$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$**.**

Soluţie: a) Deoarece

$$A(x).A(y) = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x & 2\sin x \\ -\sin x & \cos x - \sin x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos y + \sin y & 2\sin y \\ -\sin y & \cos y - \sin y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + (\sin x\cos y + \cos x\sin y) & 2(\sin x\cos y + \cos x\sin y) \\ -(\sin x\cos y + \cos x\sin y) & (\cos x\cos y - \sin x\sin y) - (\sin x\cos y + \cos x\sin y) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x+y) + \sin(x+y) & 2\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) - \sin(x+y) \end{pmatrix} = A(x+y),$$

oricare ar fi $x,\ y \in \boldsymbol{R}$, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

b) Ţinând seama de cele stabilite la a), deducem că $A^2(x) = A(x)A(x) = A(2x)$ şi că $A^3(x) = A^2(x)A(x) =$ $= A(2x)A(x) = A(3x)$, ceea ce ne sugerează că $A^n(x) = A(nx)$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$.

Fie $P(n)$ propoziţia: $A^n(x) = A(nx)$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Evident, $P(1)$ este adevărată. Presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $A^k(x) = A(kx)$ $(k \in \boldsymbol{N}^*)$. Cum $A^{k+1}(x) = A^k(x)A(x) = A(kx)A(x) = A(kx + x) =$ $= A\big((k+1)x\big)$, rezultă că şi $P(k+1)$ este adevărată. Drept urmare, $P(n)$ este adevărată.

62. ***Se consideră matricele*** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ***şi*** $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) ***Arătaţi că*** $A^4 = B^3$**.**

b) ***Demonstraţi că*** $(AB)^n \neq I_2$ **,** ***oricare ar fi*** $n \in \boldsymbol{N}^*$**.**

c) ***Determinaţi matricea*** X***, având elementele în*** $\boldsymbol{R}$***, cu proprietatea că*** $AX + XB = I_2$**.**

Soluţie: a) Remarcăm că $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, iar $A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Totodată, $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, iar $B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, deci $A^4 = B^3$.

b) Evident, $AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -C$, unde $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Remarcăm şi faptul că $C = I_2 + D$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Întrucât $D^2 = O_2$, rezultă că $D^k = O_2$, oricare ar fi $k \in \boldsymbol{N}$ şi $k \geq 2$. Drept urmare, $C^n = (I_2 + D)^n = I_2 + C_n^1 D = I_2 + nD = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, deducem că $(AB)^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ceea ce arată că $(AB)^n \neq I_2$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$.

c) Fie (m, n) tipul matricei X. Pentru ca să existe atât AX cât şi XB, este necesar ca $2 = m$, respectiv $n = 2$. Deci $X \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Cum $AX = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$, iar $XB = \begin{pmatrix} -b & a-b \\ -d & c-d \end{pmatrix}$, rezultă că $AX + XB = \begin{pmatrix} c-b & a+d-b \\ -(a+d) & -b+c-d \end{pmatrix}$. Deci, egalitatea $AX + XB = I_2$ are loc dacă şi numai dacă $c - b = 1$,

$a+d-b=0,\ -(a+d)=0$ şi $-b+c-d=1$, ceea ce conduce la $a=b=d=0$ şi $c=1$. Rezultă că $X=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

63. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$***. Arătați că*** $A^n\neq I_3$***, oricare ar fi*** $n\in\boldsymbol{N}^*$**.**

Soluție: Faptul că $A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ne sugerează că $A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\a_n&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, iar $a_n>0$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$, ceea ce se demonstrează prin inducție matematică. Acest rezultat arată că $A^n\neq I_3$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$.

64. ***Fie matricea*** $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}$***. Determinați*** $n\in\boldsymbol{N}^*$***, ştiind că*** $A^n+A^{n+2}=90A$**.**

Soluție: Evident, $A^2=AA=\begin{pmatrix}3&0&3\\0&0&0\\6&0&6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}=3A$. Deducem că $A^3=A^2A=(3A)A=3A^2=$ $=3(3A)=3^2A$ şi $A^4=A^3A=(3^2A)A=3^2A^2=3^2(3A)=3^3A$. Aceste rezultate ne sugerează că $A^n=3^{n-1}A$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$, ceea ce se demonstrează prin inducție matematică. Drept urmare, $A^n+A^{n+2}=3^{n-1}A+3^{n+1}A=10\cdot3^{n-1}A$, iar egalitatea $A^n+A^{n+2}=90A$ conduce la $10\cdot3^{n-1}=90$, de unde $3^{n-1}=9$, deci $n=3$.

65. ***Fie*** ε ***una dintre rădăcinile cubice complexe ale unității şi matricea*** $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon^2&\varepsilon\end{pmatrix}$***. Calculați*** A^n **(**$n\in\boldsymbol{N}^*$**).**

Soluție: Având în vedere că $A^2=AA$, iar $\varepsilon^3=1$ şi $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$, deducem că $A^2=3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Întrucât $A^3=A^2A$ şi $A^4=A^3A$, rezultă că $A^3=3\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\varepsilon^2&\varepsilon\\1&\varepsilon&\varepsilon^2\end{pmatrix}$ şi $A^4=3^2I_3$. Ținând seama de cele stabilite anterior, conchidem că:

$A^{4k}=(A^4)^k=3^{2k}I_3\quad(k\in\boldsymbol{N}^*)$, $A^{4k+1}=A^{4k}A=3^{2k}A$, $A^{4k+2}A=3^{2k}A^2$ şi $A^{4k+3}=3^{2k}A^3\quad(k\in\boldsymbol{N})$.

66. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$ ***şi*** $B=A+A^2+\ldots+A^n\quad(n\in\boldsymbol{N}^*)$***. Determinați matricea*** B**.**

Soluție: Deoarece

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix},\ A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&3&8\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ şi }A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&4&11\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

iar $5=3\cdot 2-1$, $8=3\cdot 3-1$ şi $11=3\cdot 4-1$, ni se sugerează că $A^k=\begin{pmatrix}1 & k & 3k-1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, oricare ar fi $k\in \boldsymbol{N}^*$, ceea ce se demonstrează prin inducție matematică. Cum $B=\sum_{k=1}^{n}A^k$, rezultă că

$$B=\begin{pmatrix}n & \sum_{k=1}^{n}k & \sum_{k=1}^{n}(3k-1)\\ 0 & n & 3n\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{3n^2+n}{2}\\ 0 & n & 3n\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

67. ***Fie*** $a\in \boldsymbol{R}$ ***şi matricea*** $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ a & 0 & 0\end{pmatrix}$***. Determinați matricea*** $B=A^n+A^{n+1}+A^{n+2}$ **(**$n\in \boldsymbol{N}^*$**).**

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că $A^2=AA=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\end{pmatrix}$ şi că $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}=aI_3$. Rezultă că $A^{3k}=(A^3)^k=(aI_3)^k=a^kI_3$ $(k\in \boldsymbol{N}^*)$, $A^{3k+1}=A^{3k}A=a^kI_3A=a^kA$ şi $A^{3k+2}=A^{3k}A^2=a^kA^2$ $(k\in \boldsymbol{N})$. Evidențiem şi faptul că $B=A^n(I_3+A+A^2)$. Fie $C=I_3+A+A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 1 & 1\\ a & a & 1\end{pmatrix}$. Atunci, $B=A^nC$. Drept urmare: dacă $n=3k$ $(k\in \boldsymbol{N}^*)$, atunci $B=a^kI_3C=a^kC=\begin{pmatrix}a^k & a^k & a^k\\ a^{k+1} & a^k & a^k\\ a^{k+1} & a^{k+1} & a^k\end{pmatrix}$;

dacă $n=3k+1$ $(k\in \boldsymbol{N})$, atunci $B=a^kAC=\begin{pmatrix}a^{k+1} & a^k & a^k\\ a^{k+1} & a^{k+1} & a^k\\ a^{k+1} & a^{k+1} & a^{k+1}\end{pmatrix}$;

dacă $n=3k+2$ $(k\in \boldsymbol{N})$, atunci $B=a^kA^2C=\begin{pmatrix}a^{k+1} & a^{k+1} & a^k\\ a^{k+1} & a^{k+1} & a^{k+1}\\ a^{k+2} & a^{k+1} & a^{k+1}\end{pmatrix}$.

68. ***Se consideră matricele pătratice de ordinul trei*** $A=(a_{ij})$ ***şi*** $B=(b_{ij})$**,** ***definite prin*** $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{dacă } i+j=4\\ 0, & \text{dacă } i+j\neq 4\end{cases}$ ***şi*** $b_{ij}=\begin{cases}(-1)^{j-1}C_{j-1}^{i-1}, & \text{dacă } i<j\\ (-1)^{i-1}, & \text{dacă } i=j\\ 0, & \text{dacă } i>j\end{cases}$**.** ***Calculați*** A^mB^n $(m,\, n\in \boldsymbol{N}^*)$**.**

Soluție: Se arată cu uşurință că $a_{11}=0$, $a_{12}=0$, $a_{13}=1$, $a_{21}=0$, $a_{22}=1$, $a_{23}=0$, $a_{31}=1$, $a_{32}=0$, $a_{33}=0$. Deducem imediat că $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Deoarece $A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$, $A^3=A^2A=I_3A=A$, $A^4=A^3A=$ $=AA=A^2=I_3$, $A^5=A^4A=I_3A=A$, ni se sugerează să demonstrăm propoziția $P(n)$: $A^{2n-1}=A$ şi $A^{2n}=I_3$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Evident, $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $A^{2k-1}=A$

şi $A^{2k}=I_3$ $(k\in \boldsymbol{N}^*)$. Atunci, $A^{2k+1}=A^{2k}A=I_3A=A$ şi $A^{2k+2}=A^{2k}A^2=I_3I_3=I_3$,ceea ce arată că $P(k+1)$ este adevărată. Prin urmare, $P(n)$ este adevărată.

Ţinând seama de enunţ, deducem că $b_{11}=1,\ b_{12}=-1,\ b_{13}=1,\ b_{21}=0,\ b_{22}=-1,\ b_{23}=2,\ b_{31}=0,\ b_{32}=0,$ $b_{33}=1$, de unde $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$. Întrucât $B^2=BB=I_3,\ B^3=B^2B=I_3B=B,\ B^4=B^3B=BB=B^2=I_3$, ni se sugerează să demonstrăm propoziţia: $B^{2n-1}=B$ şi $B^{2n}=I_3$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Folosind inducţia matematică, demonstrarea acestei propoziţii o realizăm imediat. Din cele stabilite anterior deducem că:

- dacă $m=2k$ şi $n=2h$ $(k,\ h\in \boldsymbol{N}^*)$, atunci $A^mB^n=I_3$;
- dacă $m=2k-1$ şi $n=2h$ $(k,\ h\in \boldsymbol{N}^*)$, atunci $A^mB^n=A$;
- dacă $m=2k$ şi $n=2h-1$ $(k,\ h\in \boldsymbol{N}^*)$, atunci $A^mB^n=B$;
- dacă $m=2k-1$ şi $n=2h-1$ $(k,\ h\in \boldsymbol{N}^*)$, atunci $A^mB^n=AB$.

69. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$**.**

a) ***Arătaţi că*** $A^2=4A-3I_3$**.**

b) ***Demonstraţi că*** $A^n=\dfrac{3^n-1}{2}A-\dfrac{3^n-3}{2}I_3$**,** ***oricare ar fi*** $n\in \boldsymbol{N}^*$**.**

Soluţie: a) Întrucât $A^2=AA=\begin{pmatrix}5&0&4\\0&9&0\\4&0&5\end{pmatrix}$, iar $4A-3I_3=\begin{pmatrix}8&0&4\\0&12&0\\4&0&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&4\\0&9&0\\4&0&5\end{pmatrix}$, rezultă că $A^2=4A-3I_3$.

b) Fie $P(n)$ propoziţia: $A^n=\dfrac{3^n-1}{2}A-\dfrac{3^n-3}{2}I_3$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Evident, $P(1)$ este adevărată.

Presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $A^k=\dfrac{3^k-1}{2}A-\dfrac{3^k-3}{2}I_3$ $(k\in \boldsymbol{N}^*)$. Cum $A^{k+1}=A^kA$, rezultă că

$$A^{k+1}=\frac{3^k-1}{2}A^2-\frac{3^k-3}{2}A=\frac{3^k-1}{2}(4A-3I_3)-\frac{3^k-3}{2}A=\frac{4(3^k-1)-(3^k-3)}{2}A-\frac{3(3^k-1)}{2}I_3=\frac{3^{k+1}-1}{2}A-\frac{3^{k+1}-3}{2}I_3,$$

ceea ce arată că şi $P(k+1)$ este adevărată. Prin urmare, $P(n)$ este adevărată. Astfel, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

70. ***Fie matricele*** $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ ***şi*** $B=A+{}^tA$**.** ***Arătaţi că*****:**

$B^2=B+2I_3$ ***şi că*** $B^n=\dfrac{1}{3}\left[2^n-(-1)^n\right]B+\dfrac{2}{3}\left[2^{n-1}-(-1)^{n-1}\right]I_3$**,** ***oricare ar fi*** $n\in \boldsymbol{N}^*$**.**

Soluţie: Evident, $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Deducem imediat că $B^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ şi că $B+2I_3=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, deci $B^2=B+2I_3$. Fie propoziţia $P(n):\ B^n=\dfrac{1}{3}\left[2^n-(-1)^n\right]B+\dfrac{2}{3}\left[2^{n-1}-(-1)^{n-1}\right]I_3$,

oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Se observă cu uşurinţă că $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $B^k = \frac{1}{3}\left[2^k - (-1)^k\right]B + \frac{2}{3}\left[2^{k-1} - (-1)^{k-1}\right]I_3$ $(k \in \boldsymbol{N}^*)$. Atunci,

$$B^{k+1} = B^k B = \frac{1}{3}\left[2^k - (-1)^k\right]B^2 + \frac{2}{3}\left[2^{k-1} - (-1)^{k-1}\right]B .$$

Cum $B^2 = B + 2I_3$, rezultă că

$$B^{k+1} = \frac{1}{3}\left[2^k - (-1)^k\right](B + 2I_3) + \frac{2}{3}\left[2^{k-1} - (-1)^{k-1}\right]B = \frac{1}{3}\left[2^k - (-1)^k + 2^k - 2(-1)^{k-1}\right]B + \frac{2}{3}\left[2^k - (-1)^k\right]I_3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[2^{k+1} - (-1)^{k+1}\right]B + \frac{2}{3}\left[2^k - (-1)^k\right]I_3 \quad (\text{căci} \quad -(-1)^k - 2(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1} - 2(-1)^{k+1} = -(-1)^{k+1}),$$

ceea ce arată că $P(k+1)$ este adevărată. Drept urmare, $P(n)$ este adevărată, ceea ce trebuia să demonstrăm.

71. ***Fie*** $a \in \boldsymbol{R}$ ***şi matricea*** $A = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix}$. ***Calculaţi*** A^n **(** $n \in \boldsymbol{N}^*$**).**

Soluţie: Evident, $A = I_2 + aB$, unde $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Remarcând şi faptul că $B^k = B$, oricare ar fi $k \in \boldsymbol{N}^*$ şi că $I_2 B = BI_2$, deducem că

$$A^n = (I_2 + aB)^n = I_2 + C_n^1 aB + C_n^2 a^2 B^2 + \ldots + C_n^n a^n B^n =$$

$$= I_2 + C_n^1 aB + C_n^2 a^2 B + \ldots + C_n^n a^n B = I_2 + \left(C_n^1 a + C_n^2 a^2 + \ldots + C_n^n a^n\right)B = I_2 + \left[(1+a)^n - 1\right]B .$$

72. ***Se consideră matricele*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ***şi*** $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) ***Arătaţi că*** $A + B = I_2$.

b) ***Calculaţi*** B^2 ***şi, apoi, determinaţi*** A^n **(** $n \in \boldsymbol{N}^*$**).**

Soluţie: a) Deoarece $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, rezultă că $A + B = I_2$.

b) Remarcând faptul că $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, deducem că $B^2 = -B$. Întrucât $A = I_2 - B$, rezultă că $A = I_2 + B^2$. Ţinând seama şi de faptul că $I_2 B^2 = B^2 I_2$, conchidem că $A^n = I_2 + C_n^1 B^2 + C_n^2 B^4 + C_n^3 B^6 + \ldots + C_n^n B^{2n}$. Totodată, $B^4 = B^2 B^2 = (-B)(-B) = B^2$, $B^6 = B^4 B^2 = B^2 B^2 = B^4 = B^2$. Aceste rezultate ne sugerează propoziţia $P(n)$: $B^{2n} = B^2$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, ceea ce se demonstrează prin inducţie matematică. Deci,

$$A^n = I_2 + \left(C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n\right)B^2 = I_2 + \left(1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n - 1\right)B^2 = I_2 + (2^n - 1)B^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n \end{pmatrix}.$$

73. ***Se consideră matricele*** $A, B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ ***cu proprietatea că*** $B - A = I_n$. ***Ce condiţie trebuie să îndeplinească matricea*** A ***astfel încât, oricare ar fi*** $k \in \boldsymbol{N}^*$**, să aibă loc egalitatea**

$$B + B^2 + \ldots + B^k = kI_n + \frac{k(k+1)}{2}A \text{ ?} \qquad \textbf{(1)}$$

Soluţie: Pentru $k = 1$, egalitatea (1) devine $B = I_n + A$, ceea ce are loc (conform enunţului). Pentru $k = 2$, egalitatea (1) devine $B + B^2 = 2I_n + 3A$. Cum $B = I_n + A$, rezultă că $B + B^2 = I_n + A + (I_n + A)^2 =$ $= I_n + A + I_n + 2A + A^2 = 2I_n + 3A + A^2$. Prin urmare, pentru ca egalitatea (1) să aibă loc în cazul considerat, este necesar ca $A^2 = O_n$. Dacă $A^2 = O_n$, atunci $A^m = O_n$ oricare ar fi $m \in \boldsymbol{N}$ şi $m \geq 2$. Ţinând seama de

acest rezultat, deducem că $B^m=(I_n+A)^m=I_n+C_m^1A+C_m^2A^2+\ldots+C_m^mA^m=I_n+mA$. Drept urmare, $B+B^2+\ldots+B^k=I_n+A+(I_n+2A)+(I_n+3A)+\ldots+(I_n+kA)=k\,I_n+(1+2+3+\ldots+k)A=k\,I_n+\frac{k(k+1)}{2}A$. Ca urmare a celor stabilite anterior, condiția căutată este $A^2=O_n$.

74. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix}6&5\\-3&-2\end{pmatrix}$***. Calculați*** A^n $(n\in N^*)$**.**

Soluție: Pentru început, remarcăm faptul că $A=I_2+B$, unde $B=\begin{pmatrix}5&5\\-3&-3\end{pmatrix}$. Întrucât $B^2=\begin{pmatrix}10&10\\-6&-6\end{pmatrix}=$ $=2\begin{pmatrix}5&5\\-3&-3\end{pmatrix}=2B$, iar $B^3=B^2B=(2B)B=2B^2=2(2B)=2^2B$ şi $B^4=B^3B=2^2BB=2^2B^2=2^2(2B)=$ $=2^3B$, ni se sugerează că $B^n=2^{n-1}B$, oricare ar fi $n\in N$ şi $n\geq 2$, ceea ce se demonstrează prin inducție matematică. Evidențiind faptul că $BI_2=I_2B$, deducem că

$$A^n=(I_2+B)^n=I_2+C_n^1B+C_n^2B^2+C_n^3B^3+\ldots+C_n^nB^n=I_2+C_n^1B+C_n^2 2B+C_n^3 2^2B+\ldots+C_n^n 2^{n-1}B=$$
$$=I_2+\left(C_n^1+C_n^2 2+C_n^3 2^2+\ldots+C_n^n 2^{n-1}\right)B=I_2+\frac{1}{2}\left(1+C_n^1 2+C_n^2 2^2+C_n^3 2^3+\ldots+C_n^n 2^n-1\right)B=$$
$$=I_2+\frac{1}{2}\left[(1+2)^n-1\right]B=I_2+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\cdot 3^n-3&5\cdot 3^n-5\\-3^{n+1}+3&-3^{n+1}+5\end{pmatrix}.$$

75. ***Fie*** a ***un număr real şi matricele*** $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}$, $B=I_3+aA$, $C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&-1&-1\end{pmatrix}$**.**

a) ***Calculați*** $A-CD$**.**

b) ***Calculați*** A^2 ***şi deduceți, apoi, că*** $2B-B^2=I_3$**.**

c) ***Arătați că*** $B^n=I_3+naA$**,** ***oricare ar fi*** $n\in N^*$**.**

Soluție: a) Deoarece $CD=A$, rezultă $A-CD=O_3$.

b) Efectuând produsul AA, deducem că $A^2=O_3$. Cum $2B-B^2=2(I_3+aA)-(I_3+aA)^2=$ $=2I_3+2aA-I_3-2aA-a^2A^2=I_3-a^2A^2$, iar $A^2=O_3$, rezultă că $2B-B^2=I_3$.

c) Fie $P(n)$ propoziția: $B^n=I_3+naA$, oricare ar fi $n\in N^*$. Evident, $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $B^k=I_3+kaA$ $(k\in N^*)$. Având în vedere că $B^{k+1}=B^kB$, rezultă că $B^{k+1}=(I_3+kaA)(I_3+aA)=I_3+kaA+aA+ka^2A^2=I_3+(k+1)aA$, ceea ce arată că şi $P(k+1)$ este adevărată. Deci, $P(n)$ este adevărată.

76. ***Fie*** $x\in C$ ***şi matricea*** $A=\begin{pmatrix}1+2x&0&4x\\0&1&0\\-x&0&1-2x\end{pmatrix}$**.** ***Calculați*** A^n $(n\in N^*)$**.**

Soluție: Remarcăm, mai întâi, faptul că $A=I_3+xB$, unde $B=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&0&0\\-1&0&-2\end{pmatrix}$. Deoarece $B^2=O_3$, rezultă că $B^k=O_3$, oricare ar fi $k\in N$ şi $k\geq 2$. Drept urmare,

$$A^n=(I_3+xB)^n=I_3+C_n^1xB=I_3+nxB=\begin{pmatrix}1+2nx&0&4nx\\0&1&0\\-nx&0&1-2nx\end{pmatrix}.$$

77. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. ***Calculați*** A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

Soluție: Evident, $A=I_3+B$, unde $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Se arată cu uşurință că $B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi că $B^3=O_3$.

Deci, $B^k=O_3$, oricare ar fi $k\in \boldsymbol{N}$ şi $k\geq 3$. Remarcând şi faptul că $I_3B=BI_3$, deducem că

$$A^n=(I_3+B)^n=I_3+C_n^1B+C_n^2B^2=I_3+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

78. ***Fie*** $x,\ y\in \boldsymbol{R}$ ***şi matricea*** $A=\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}$. ***Calculați*** A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că $A=I_3+B$, unde $B=\begin{pmatrix}0&x&y\\0&0&x\\0&0&0\end{pmatrix}$. Totodată, $B^2=\begin{pmatrix}0&0&x^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$, de unde $B^k=O_3$, oricare ar fi $k\in \boldsymbol{N}$ şi $k\geq 3$. Deci, $A^n=(I_3+B)^n=$

$$=I_3+C_n^1B+C_n^2B^2+C_n^3B^3+\ldots+C_n^nB^n=I_3+C_n^1B+C_n^2B^2=I_3+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2=\begin{pmatrix}1&nx&ny+\frac{n(n-1)}{2}x^2\\0&1&nx\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

79. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\0&3&6\\0&0&3\end{pmatrix}$. ***Calculați*** A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

Soluție: Evident, $A=3I_3+2B$, unde $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$. Deoarece $B^2=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $B^3=O_3$, rezultă $B^k=O_3$, oricare ar fi $k\in \boldsymbol{N}$ şi $k\geq 3$. Drept urmare,

$$A^n=(3I_3+2B)^n=3^nI_3+C_n^1 3^{n-1}\cdot 2B+\ C_n^2 3^{n-2}\cdot 4B^2=3^nI_3+2\cdot 3^{n-1}nB+2\cdot 3^{n-2}n(n-1)B^2,$$

ceea ce conduce la

$$A^n=\begin{pmatrix}3^n&2\cdot 3^{n-1}n&2\cdot 3^{n-1}n(n+1)\\0&3^n&2\cdot 3^n n\\0&0&3^n\end{pmatrix}.$$

80. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ ***şi*** $C=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$. ***Calculaţi*** A^n, B^n ***şi*** C^n **(**$n\in \boldsymbol{N}^*$**).**

Soluţie: Faptul că $A^2=AA=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=3A$, $A^3=A^2A=(3A)A=3A^2=3(3A)=3^2A$, $A^4=A^3A=(3^2A)A=3^2A^2=3^2(3A)=3^3A$ ne sugerează că $A^n=3^{n-1}A$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, ceea ce se demonstrează prin inducţie matematică. Analog, arătăm că $B^n=3^{n-1}B$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Se observă cu uşurinţă că $C=2A+B$. Remarcăm şi faptul că $AB=BA=O_3$, ceea ce implică $A^kB^h=O_3$, oricare ar fi $k,\ h\in \boldsymbol{N}^*$. Drept urmare,

$$C^n=(2A+B)^n=2^nA^n+B^n=2^n3^{n-1}A+3^{n-1}B=3^{n-1}(2^nA+B)=3^{n-1}\begin{pmatrix}2^n+2&2^n-1&2^n-1\\2^n-1&2^n+2&2^n-1\\2^n-1&2^n-1&2^n+2\end{pmatrix}.$$

Probleme propuse

1. Se consideră mulţimea $M=\left\{\left(a_{ij}\right),\ i,j=\overline{1,2}\right\}$. Determinaţi numărul elementelor mulţimii M, ştiind că $a_{11}=a_{22}=0$ şi că $|a_{12}|=1$, iar $a_{21}\in \boldsymbol{Z}$ şi $|a_{21}|\le 1$.

2. Se consideră mulţimea $M=\left\{\left(a_{ij}\right),\ i,j=\overline{1,3}\right\}$. Determinaţi numărul elementelor mulţimii M, ştiind că $a_{ij}=0$ dacă $i=j$ şi că $|a_{ij}|=1$ dacă $i<j$, iar $a_{ij}\in \boldsymbol{Z}$ şi $|a_{ij}|\le 1$ dacă $i>j$.

3. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}$. Calculaţi $A+B$, $A-B$, $A+{}^tA$, $B-{}^tB$.

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&-2\\x&3y\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}z&-2t\\-2&-1\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}1&-3\\2&4\end{pmatrix}$. Determinaţi x, y, z şi t, ştiind că $A+B=2C$.

5. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&2&-3\\1&0&-2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&-2\end{pmatrix}$. Determinaţi matricea X, ştiind că $2X+A=B$.

6. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&1&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$. Calculaţi $A+B$, $A-B$, $2A+3B$ şi $3A-B$.

7. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$. Determinaţi matricea $X\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ cu proprietatea că $X+{}^tX=A$.

8. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$. Calculaţi $A+{}^tB$, ${}^tA-B$, $2\cdot A+3\cdot {}^tB$ şi $3\cdot {}^tA-2\cdot B$.

9. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\ -2 & 6 & 4\\ 10 & 2 & -4\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Determinaţi matricele X şi Y, ştiind că $5X-2Y=A$ şi $2X-Y=B$.

10. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & 0 & 5\\ -2 & 3 & 6\end{pmatrix}$. Determinaţi două matrice $B,\ C\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$, astfel încât $B+C=A$, iar ${}^tB=B$ şi ${}^tC=-C$.

11. Se consideră matricea $A_k=\begin{pmatrix}2^k & 4k\\ -1 & 2^k+2k\end{pmatrix}$. Determinaţi matricea $B=\sum_{k=1}^{n}A_k$.

12. Se consideră matricea $A_k=\begin{pmatrix}4k^3 & -2k & \dfrac{2}{4k^2-1}\\ k!k & C_n^k & 2\cdot 3^{k-1}\end{pmatrix}$. Determinaţi matricea $B=\sum_{k=1}^{n}A_k$.

13. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Calculaţi AB şi ${}^tA\cdot {}^tB$.

14. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Arătaţi că ${}^t(AB)=BA$.

15. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calculaţi ${}^t(AB)$, ${}^tB\cdot {}^tA$ şi, apoi, verificaţi că ${}^t(AB)={}^tB\cdot {}^tA$.

16. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 1\end{pmatrix}$. Determinaţi $x,\ y\in\boldsymbol{R}$, astfel încât $AB=BA$.

17. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$. Găsiţi o matrice $B\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$, astfel încât $AB\neq BA$.

18. Determinaţi matricele $A\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ cu proprietatea că $AX=XA$, oricare ar fi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$.

19. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ x & y\end{pmatrix}$. Determinaţi $x,\ y\in\boldsymbol{R}$, astfel încât $AB=BA$.

20. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Determinaţi $x,\ y\in\boldsymbol{R}$, astfel încât $AB=BA$.

21. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$. Determinați matricele $X\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ cu proprietatea că $AX=XA$.

22. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Determinați matricele $X\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ cu proprietatea că $AX=XB$.

23. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$ o matrice dată. Arătați că nu există nici o matrice $X\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$ astfel încât $AX-XA=I_2$.

24. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$. Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$, știind că $AX+{}^tXB=C$.

25. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $D=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$. Determinați matricele $X,\ Y\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$, știind că $X+AY=B$ și $CX+Y=D$.

26. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}x & 2y\\ y & x\end{pmatrix}\ \middle|\ x,\ y\in\boldsymbol{Z} \text{ și } x^2-2y^2=1\right\}$. Arătați că, dacă $A,\ B\in M$, atunci $AB\in M$.

27. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 6 & 3 & -3\\ -10 & -5 & 5\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & -5 & -6\end{pmatrix}$. Arătați că $AB=O_3$.

28. Fie $x\in\boldsymbol{R}$ și matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 2x^2+2x & 4x & 1\end{pmatrix}$. Arătați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,\ y\in\boldsymbol{R}$.

29. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Determinați matricele $X\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$, astfel încât $AX=XA$.

30. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Determinați matricele $X\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$, astfel încât $AX=XA$.

31. Fie $x,\ y,\ z\in\boldsymbol{C}$ și matricele $A=\begin{pmatrix}x & 0 & 1\\ 1 & y & 0\\ 0 & 1 & z\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}z & 0 & 1\\ 1 & z & 0\\ 0 & 1 & z\end{pmatrix}$. Arătați că $AB=BA$ dacă și numai dacă $x=y=z$.

32. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2.

b) Determinați $a\in\boldsymbol{R}$, astfel încât $(I_2+A)(I_2+aA)=I_2$.

33. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ cu proprietatea că $X^2=A$.

34. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$. Determinați $x,\ y\in \boldsymbol{R}$, știind că $A^2+A=2I_2$.

35. Fie $x,\ y\in \boldsymbol{R}$ și matricele $A=\begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Determinați x și y, astfel încât $A^2+A=B$.

36. Fie $x\in \boldsymbol{R}$ și matricele $A=\begin{pmatrix} x & x-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați x, știind că $A^3+A^2=B$.

37. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați matricea $X\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ cu proprietatea că $X^2=A$.

38. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$.

a) Arătați că, dacă $AX=XA$, atunci $c=0$ și $d=a$.

b) Determinați matricea X, știind că $X^5=A$.

39. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Arătați că nu există nici o matrice $X\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ astfel încât $X^2=A$.

40. Se consideră funcția $f:\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})\to \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R}),\ f(X)=X^2-3X+2I_2$. Arătați că funcția f nu este injectivă.

41. Se consideră funcția $f:\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})\to \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R}),\ f(X)=X^3-3X^2-X+3I_3$. Arătați că funcția f nu este injectivă.

42. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & i & i \\ i & 2 & i \\ i & i & 2 \end{pmatrix}$ $(i^2=-1)$. Determinați matricea $B=A^2-4A+5I_3$.

43. Fie ε una dintre rădăcinile cubice complexe ale unității și matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$. Calculați $(AB)^2$.

44. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că $A(A-I_3)(A-2I_3)=O_3$.

45. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați $a,\ b\in \boldsymbol{R}$, astfel încât $A^3=aA^2+bA$.

46. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$. Determinați matricea $X\in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$, cu proprietatea că $X^3=A$.

47. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați $x\in \boldsymbol{R}$, astfel încât $A^4=xA$.

48. Fie ε una dintre rădăcinile cubice complexe ale unității și matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon\end{pmatrix}$. Determinați $x\in \boldsymbol{R}$, astfel încât $A^5 = xA$.

49. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4\\ -3 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

a) Calculați $A+B$, $A-B$, AB, BA, A^2 și B^2.

b) Fără a calcula A^3 și B^3, determinați A^3-B^3.

50. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Determinați cea mai mică valoare a lui $n\in \boldsymbol{N}^*$, pentru care $A^n = I_4$.

51. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

52. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ și $B = A+2A^2+3A^3+\ldots+nA^n$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$. Arătați că $B=\frac{n(n+1)}{2}A$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$.

53. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{pmatrix}$ și $B = A+A^2+A^3+\ldots+A^n$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$. Arătați că $B=\frac{9^n-1}{8}A$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$.

54. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ și $B = A-A^2+A^3-A^4+\ldots+A^{2005}-A^{2006}$.

a) Calculați A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

b) Arătați că matricea B are toate elementele negative.

55. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ și $B = I_2+A+A^2+\ldots+A^{2006}$. Arătați că $B=\begin{pmatrix}1004 & -1003\\ -1003 & 1004\end{pmatrix}$.

56. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

57. Fie ε una dintre rădăcinile cubice complexe ale unității și matricea $A=\begin{pmatrix}1 & \varepsilon\\ \varepsilon^2 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$

b) Determinați matricea $B = A+A^2+\ldots+A^n$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

58. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

59. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

60. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

61. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Arătați că $A^n\neq I_2$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$.

62. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}7 & 4\\ -9 & -5\end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

63. Fie $a\in \boldsymbol{R}$ și matricea $A=\begin{pmatrix}a+1 & a\\ -(a+1) & -a\end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

64. Fie $a\in \boldsymbol{R}$ și matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & a+1\end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

65. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ și $B=A+A^2+\ldots+A^n$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$. Determinați matricea B.

66. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$. Calculați A^8.

67. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

68. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ și $B=I_2+A+A^2+\ldots+A^{101}$.

a) Determinați cea mai mică valoare a lui n, pentru care $A^n=I_2$.

b) Aflați matricea B.

69. Se consideră matricele $U=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=I_2+aU$ $(a\in \boldsymbol{R})$.

a) Arătați că $A(a)A(b)=A(a+b+ab)$.

b) Determinați $a,\ b\in \boldsymbol{Z}$, astfel încât $A(a)A(b)=I_2$.

c) Calculați $A^n(a)$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

70. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ și $B=A+A^2+\ldots+A^{99}-A^{100}$.

a) Determinați $a\in \boldsymbol{R}$, astfel încât $(I_2+A)(I_2+aA)=I_2$.

b) Aflați matricea $C\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$, cu proprietatea că $AC=CA$.

c) Calculați A^n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

d) Arătați că toate elementele matricei B sunt numere întregi negative.

71. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\mid a,\ b\in \boldsymbol{R}\right\}$.

a) Arătați că $A+B\in M$ și $AB\in M$, oricare ar fi $A,\ B\in M$.

b) Determinați matricea $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$, cu proprietatea că $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$.

c) Fie $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$. Aflați matricea $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, cu proprietatea că $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

72. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

73. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

74. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ și $D = ABC$.

a) Arătați că $AC = CA = I_2$.

b) Calculați B^n $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

c) Demonstrați că $D^n = AB^nC$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$ și, apoi, calculați D^n.

75. Fie $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$, $a \neq c$ și matricea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

a) Calculați X^n $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

b) Arătați că, dacă $X + X^2 + ... + X^n = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, atunci $b(A - C) = B(a - c)$.

76. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează cu $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Arătați că $\frac{b_n}{2} = \frac{c_n}{3} = \frac{a_n - d_n}{4}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$.

77. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determinați $a,\ b \in \boldsymbol{R}$, astfel încât $A^2 = aA + bI_2$.

b) Arătați că $A^n = \frac{3^n - 1}{2}(A - I_2) + I_2$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$.

c) Calculați $A + A^2 + ... + A^n$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

78. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

79. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că $A^n \neq I_3$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$.

80. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

81. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

82. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Calculați A^n ($n\in \boldsymbol{N}^*$) și, apoi, determinați matricea $B=\sum_{k=1}^{n}A^k$.

83. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $C=A+A^2+...+A^{100}$.

a) Arătați că $A^2=B^2=I_3$.

b) Determinați matricea C.

c) Demonstrați că $(AB)^n\neq I_3$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$.

84. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^n și B^n.

b) Arătați că $AB=BA=O_3$ și, apoi, calculați $(A+B)^n$ ($n\in \boldsymbol{N}^*$).

85. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2&3&6\\0&2&3\\0&0&2\end{pmatrix}$. Calculați A^n.

86. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A+A^2+...+A^{2006}$. Arătați că elementele matricei B sunt egale.

Răspunsuri

1. 6 **2.** $2^3\cdot 3^3$ **4.** $x=6,\ y=3,\ z=0,\ t=2$ **5.** $X=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$ **7.** $X=\begin{pmatrix}1&a\\3-a&2\end{pmatrix},\ a\in \boldsymbol{R}$

9. $X=\begin{pmatrix}-4&2&-6\\0&4&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-11&3&-14\\1&7&-2\\-5&-1&-13\end{pmatrix}$ **10.** $B=\frac{1}{2}(A+{}^tA)$ și $C=\frac{1}{2}(A-{}^tA)$

11. $B=\begin{pmatrix}2^{n+1}-2&2n(n+1)\\-n&2^{n+1}-2+n(n+1)\end{pmatrix}$ **12.** $B=\begin{pmatrix}n^2(n+1)^2&-n(n+1)&\frac{2n}{2n+1}\\(n+1)!-1&2^n-1&3^n-1\end{pmatrix}$ **16.** $x=y=0$ **17.** $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $b\neq -3c$ sau $a\neq b+d$ **18.** $A=aI_2$ (a oarecare în $\boldsymbol{R}$) **19.** $x=0,\ y=3$ **20.** $x=2,\ y=a$ ($a\in \boldsymbol{R}$)

21. $X=\begin{pmatrix}a&2b\\-b&a-2b\end{pmatrix},\ a,\ b\in \boldsymbol{R}$ **22.** $X=\begin{pmatrix}a&a-2c\\c&c\end{pmatrix},\ a,\ c\in \boldsymbol{R}$ **24.** $X=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ **25.** $X=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$ și $Y=\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}$ **29.** $X=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&d&0\\-c&e&d+e\end{pmatrix},\ a,\ b,\ c,\ d,\ e\in \boldsymbol{R}$ **30.** $X=\begin{pmatrix}a+b&b&0\\-b&a&0\\0&0&c\end{pmatrix},\ a,\ b,\ c\in \boldsymbol{R}$

32. $A^2 = O_2$ şi $a = -1$ **33.** $X = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sau $X = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **34.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

35. $x = -1,\ y = 1$ **36.** $x = 2$ **37.** $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sau $X = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **38.** $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

42. $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **43.** $(AB)^2 = 9\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$ **45.** $a = 3,\ b = -2$ **46.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **47.** $x = 27$

48. $x = 9$ **50.** $n = 4$ **51.** $A^n = 5^{n-1}A$ **54.** $A^n = 5^{n-1}A,\ B = \frac{1-5^{2006}}{6}A$ **56.** $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

57. $B = \begin{pmatrix} 2^n - 1 & (2^n - 1)\varepsilon \\ (2^n - 1)\varepsilon^2 & 2^n - 1 \end{pmatrix}$ **58.** $A^n = \begin{pmatrix} 4n+1 & 4n \\ -4n & 1-4n \end{pmatrix}$ **59.** $A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2^n + 1 & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2^n + 1 \end{pmatrix}$ **60.** $A^{2n} = 7^n I_2,$

$A^{2n+1} = 7^n A$ **62.** $A^n = \begin{pmatrix} 6n+1 & 4n \\ -9n & 1-6n \end{pmatrix}$ **63.** $A^n = A,$ oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$

64. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (a+1)^n - 1 & (a+1)^n \end{pmatrix}$ **65.** $B = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 2 & (n-1)2^n + 1 \\ 0 & 2^{n+1} - 2 \end{pmatrix}$ **66.** $A^8 = 2^8 I_2$

67. $A^n = 2^n\begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6} & -\sin\frac{n\pi}{6} \\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}$ **68. a)** $n = 6$; **b)** $B = O_2$ **69. b)** $a = b = 0$ sau $a = b = -2$;

c) $A^n(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (a+1)^n - 1 & (a+1)^n \end{pmatrix}$ **70. a)** $a = -\frac{1}{4}$; **b)** $C = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a+b \end{pmatrix}$; **c)** $A^n = 3^{n-1}A$ **71. b)** $a = 1,$

$b = -2$; **c)** dacă n număr par, atunci $a = 1,\ b = \frac{2}{n}$ sau $a = -1,\ b = -\frac{2}{n}$, iar dacă n este număr impar,

atunci $a = 1,\ b = \frac{2}{n}$ **72.** $A^n = 2^n I_2 + 2^{n-1} \cdot 3nB,$ unde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **73.** $A^n = I_2 + (2^n - 1)B,$ unde

$B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ **74.** $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ şi $D^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+3\cdot 2^n & 2^n - 1 \\ 3(2^n - 1) & 2^n + 3 \end{pmatrix}$ **75.** $X^n = \begin{pmatrix} a^n & \frac{b(a^n - c^n)}{a-c} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$

77. a) $a = 4,\ b = -3$; **c)** $A + A^2 + \ldots + A^n = \frac{(3^{n+1} - 2n - 3)}{4}(A - I_2) + nI_2$ **78.** $A^{2n-1} = 2^{n-1}A,\quad A^{2n} = 2^{n-1}A^2$

80. $A^n = I_3 + C_n^1 B$, unde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ **81.** $A^n = 2^n I_3 + 3 \cdot 2^{n-1} C_n^1 B + 9 \cdot 2^{n-2} C_n^2 B^2$, unde

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **82.** $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **83.** $C = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$ **84.** $A^n = 3^{n-1}A,\quad B^n = (-1)^{n-1}3^{n-1}B,$

$(A+B)^n = 3^{n-1}\left(A + (-1)^{n-1}B\right)$ **85.** $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3\cdot 2^{n-1}n & 3\cdot 2^n n + 9\cdot 2^{n-3}n(n-1) \\ 0 & 2^n & 3\cdot 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ **86.** $B = 669\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

CAPITOLUL III

DETERMINANȚI

Probleme rezolvate

1. ***Calculați determinanții*:**

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 3+\sqrt{2} & 3+\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} & 3-\sqrt{2} \end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2+i & 5i \\ -i & 2-i \end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 2\cos a+1 & 1+2\sin a \\ 1-2\sin a & 2\cos a-1 \end{vmatrix},\ \Delta_4=\begin{vmatrix} 1 & (a+b)(a+bi) \\ a-bi & a^2b+ab^2 \end{vmatrix}.$$

Soluție: Evident,

$$\Delta_1=\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)-\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)=7-6=1,\quad \Delta_2=(2+i)(2-i)+5i^2=4-i^2+5i^2=$$

$$=4+4i^2=4-4=0,\quad \Delta_3=4\cos^2 a-1-(1-4\sin^2 a)=4(\cos^2 a+\sin^2 a)-2=4-2=2 \text{ și}$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 1 & (a+b)(a+bi) \\ a-bi & ab(a+b) \end{vmatrix}=(a+b)\begin{vmatrix} 1 & a+bi \\ a-bi & ab \end{vmatrix}=(a+b)\left[ab-(a-bi)(a+bi)\right]=$$

$$=(a+b)\left(ab-a^2-b^2\right)=-(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=-\left(a^3+b^3\right).$$

Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

2. ***Fie*** ε ***una dintre rădăcinile cubice complexe ale unității. Calculați determinanții*:**

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \varepsilon^2 & 1+\varepsilon^2 \\ -1 & \varepsilon^2 \end{vmatrix} \text{ **și** } \Delta_2=\begin{vmatrix} \varepsilon^2 & 1 \\ 2-\varepsilon & 1+\varepsilon \end{vmatrix}.$$

Soluție: Deoarece $\varepsilon^3=1$ și $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$, rezultă că $\Delta_1=\varepsilon^4+1+\varepsilon^2=\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$, iar $\Delta_2=\varepsilon^2+\varepsilon^3-$ $-2+\varepsilon=\varepsilon^2+\varepsilon+1-2=-2$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

3. ***Fie*** $z_1,\ z_2\in \boldsymbol{C}$ ***și matricea*** $A=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}$***. Arătați, că dacă*** $\det(A)=0$ ***, atunci*** $A=O_2$ **.**

Soluție: Deoarece $\det(A)=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=|z_1|^2+|z_2|^2$, iar $\det(A)=0$, rezultă că $|z_1|^2+|z_2|^2=0$, ceea ce are loc dacă și numai dacă $|z_1|=0$ și $|z_2|=0$ (căci $|z_1|,\ |z_2|\in \boldsymbol{R}$), de unde $z_1=0$ și $z_2=0$. Drept urmare, $A=O_2$.

4. ***Fie*** $x\in \boldsymbol{R}$ ***și determinantul*** $\Delta(x)=\begin{vmatrix} 2\sin x & -3 \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$***. Rezolvați ecuația*** $\Delta(x)=3$ **.**

Soluție: Se arată cu ușurință că $\Delta(x)=3\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\cos x=3\Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x)+3\cos x=3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x+1=0\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}$ sau $\cos x=1$, de unde $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ sau $x=2k\pi$ $(k\in \boldsymbol{Z})$.

Deci, soluțiile ecuației considerate sunt elementele mulțimii $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \mid k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup\left\{2k\pi \mid k\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

5. ***Se consideră determinanții*** $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & -3 \\ -1 & 10 & 8 \end{vmatrix}$ ***și*** $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 15 & -1 \end{vmatrix}$***. Folosind unele proprietăți ale determinanților, arătați că*** $\Delta_2=\Delta_1^3$ **.**

Soluție: Evident, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1+1 & -2+2\cdot 1 \\ 5 & 6+5 & -3+2\cdot 5 \\ -1 & 10-1 & 8+2\cdot(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & 7 \\ -1 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 3$, $\Delta_2 = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 3 \\ 1 & 1-1 & 2 \\ -4 & 5+4 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-9)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 27$. Drept urmare, $\Delta_2 = \Delta_1^3$.

6. ***Fie*** $a \in R$ ***şi determinantul*** $\Delta = \begin{vmatrix} 3a & 3a+1 & 3a \\ 2a+1 & 2a & 2a \\ 5a & 5a & 5a-1 \end{vmatrix}$. ***Arătați că*** $\Delta = 1$.

Soluție: Scăzând în determinantul Δ coloana a treia din primele două coloane şi, apoi, în determinantul astfel obținut, scăzând linia a doua din linia a treia, deducem că $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3a \\ 1 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 3a-1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3a \\ 1 & 3a-1 \end{vmatrix} = 1$.

7. ***Rezolvați ecuația*** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & x^2 & 2x+6 \end{vmatrix} = 0$.

Soluție: Întrucât $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & x^2 & 2x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & x^2-6 & 2x-3 \end{vmatrix} = x^2-2x-3$, ecuația considerată este echivalentă cu $x^2-2x-3=0$. Deducem imediat că soluțiile ecuației sunt -1 şi 3.

8. ***Rezolvați ecuația*** $\begin{vmatrix} x+1 & 2x+3 & 3x+5 \\ 2x+3 & 3x+5 & 4x+7 \\ 3x+3 & 5x+8 & 11x+13 \end{vmatrix} = 0$.

Soluție: Fie Δ determinantul din membrul întâi al ecuației considerate. Deoarece $\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & 2x+3-(x+1) & 3x+5-(2x+3) \\ 2x+3 & 3x+5-(2x+3) & 4x+7-(3x+5) \\ 3x+3 & 5x+8-(3x+3) & 11x+13-(5x+8) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+2 \\ 2x+3 & x+2 & x+2 \\ 3x+3 & 2x+5 & 6x+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & 0 \\ 2x+3 & x+2 & 0 \\ 3x+3 & 2x+5 & 4x \end{vmatrix} =$

$= 4x\left[(x+1)(x+2)-(x+2)(2x+3)\right] = -4x(x+2)^2$, rezultă că soluțiile ecuației considerate sunt $x_1 = x_2 = -2$ şi $x_3 = 0$.

9. ***Fie*** a ***un parametru real. Rezolvați ecuația*** $\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} & e^{2a} \end{vmatrix} = 0$.

Soluție: Dezvoltând determinantul după regula triunghiurilor, ecuația considerată conduce la $e^{2(2x+a)} + 2e^{-(2x+a)} - 3 = 0$. Notând $e^{2x+a} = t$ ($t > 0$), ultima ecuație conduce la $t^2 + \frac{2}{t} - 3 = 0$, ecuație echivalentă cu $t^3 - 3t + 2 = 0$. Rezolvând această ecuație, deducem că soluțiile ei sunt $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = -2$. Cum $t > 0$, convine numai $t = 1$. Rezultă că $e^{2x+a} = 1$, de unde $2x + a = 0$, ceea ce conduce la $x = -\frac{a}{2}$.

10. ***Fie*** $a,\ b,\ c \in C$ ***şi determinantul*** $\Delta = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a-b & b-c & c-a \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$. ***Calculați*** Δ***, scriind rezultatul sub formă de produs.***

Soluție: Adunând coloanele a doua şi a treia la prima coloană, obținem $\Delta = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 0 & b-c & c-a \\ 0 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$, ceea ce conduce la $\Delta = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} b-c & c-a \\ b^2-c^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} b-c & c-a \\ (b-c)(b+c) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} =$

$= 2(a+b+c)(b-c)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+c & c+a \end{vmatrix} = 2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

11. ***Fie*** $a \in \boldsymbol{R}$. ***Calculați*** $\Delta = \begin{vmatrix} 2a+1 & a+1 & 3a \\ 2a-1 & a-2 & 2a-1 \\ 3a & 2a & 4a-1 \end{vmatrix}$***, scriind rezultatul sub formă de produs.***

Soluție: Folosind proprietăți ale determinanților, deducem că $\Delta = \begin{vmatrix} 2a+1-3a & a+1-2a & 3a-(4a-1) \\ 2a-1 & a-2 & 2a-1 \\ 3a & 2a & 4a-1 \end{vmatrix} =$

$= (1-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a-1 & a-2 & 2a-1 \\ 3a & 2a & 4a-1 \end{vmatrix} = (1-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a-1 & -(a+1) & 0 \\ 3a & -a & a-1 \end{vmatrix} = -(1-a)(a+1)(a-1) = (a-1)^2(a+1)$.

Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

12. ***Fie*** ε ***una dintre rădăcinile cubice complexe ale unității. Calculați determinantul*****:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}.$$

Soluție: Folosind proprietăți ale determinanților şi ținând seama de faptul că $\varepsilon^3 = 1$ şi $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, deducem că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon-1 & \varepsilon^2-1 \\ 1 & \varepsilon^2-1 & \varepsilon-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon-1 & \varepsilon^2-1 \\ \varepsilon^2-1 & \varepsilon-1 \end{vmatrix} = (\varepsilon-1)^2 - (\varepsilon^2-1)^2 = \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 - (\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 + 1) =$

$= \varepsilon^2 - 2\varepsilon - \varepsilon + 2\varepsilon^2 = 3(\varepsilon^2 - \varepsilon) = 3(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 - 2\varepsilon - 1) = -3(2\varepsilon + 1)$.

13. ***Fără a calcula determinanții*** $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1x+b_1 & a_1+b_1x & c_1 \\ a_2x+b_2 & a_2+b_2x & c_2 \\ a_3x+b_3 & a_3+b_3x & c_3 \end{vmatrix}$ ***şi*** $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$***, arătați că*** $\Delta_1 = (x^2-1)\Delta_2$**.**

Soluție: Evidențiind faptul că $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1x+b_1+a_1+b_1x & a_1+b_1x & c_1 \\ a_2x+b_2+a_2+b_2x & a_2+b_2x & c_2 \\ a_3x+b_3+a_3+b_3x & a_3+b_3x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1+b_1)(x+1) & a_1+b_1x & c_1 \\ (a_2+b_2)(x+1) & a_2+b_2x & c_2 \\ (a_3+b_3)(x+1) & a_3+b_3x & c_3 \end{vmatrix} =$

$= (x+1)\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_1x & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2+b_2x & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3+b_3x & c_3 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_1x-(a_1+b_1) & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2+b_2x-(a_2+b_2) & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3+b_3x-(a_3+b_3) & c_3 \end{vmatrix} =$

$= (x+1)\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1(x-1) & c_1 \\ a_2+b_2 & b_2(x-1) & c_2 \\ a_3+b_3 & b_3(x-1) & c_3 \end{vmatrix} = (x^2-1)\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (x^2-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (x^2-1)\Delta_2$,

cerința enunțului a fost îndeplinită.

14. ***Fără a calcula determinanții, arătați că*** $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$.

Soluție: Deoarece

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b-b \\ q & r+p & p+q-q \\ y & z+x & x+y-y \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} c & c+a-c & a+b \\ r & r+p-r & p+q \\ z & z+x-z & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ q & y & z \end{vmatrix},$$

cerința enunțului a fost îndeplinită.

15. Fie $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$***. Calculați determinantul*** $\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ***în două moduri şi, apoi, arătați că***

$$a^3\left(b^2-c^2\right)+b^3\left(c^2-a^2\right)+c^3\left(a^2-b^2\right) = -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)\ .$$

Soluție: Fie Δ determinantul considerat în enunț. Dezvoltând acest determinant după elementele primei linii, obținem

$$\Delta = a^3\left(b^2-c^2\right)+b^3\left(c^2-a^2\right)+c^3\left(a^2-b^2\right). \qquad (1)$$

Aplicând proprietățile determinanților, deducem că

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^3-a^3 & c^3-a^3 \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b^2+ab+a^2 & c^2+ac-b^2-ab \\ b+a & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b^2+ab+a^2 & (c-b)(a+b+c) \\ b+a & c-b \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} b^2+ab+a^2 & a+b+c \\ b+a & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)\ .$$

Acest rezultat, împreună cu relația (1), conduce la egalitatea pe care trebuia să o demonstrăm.

16. ***Se consideră determinanții*** $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$ ***şi*** $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$***. Arătați că*** $\Delta_1^2 = 4\Delta_2$.

Soluție: Folosind proprietăți ale determinanților, deducem că $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2(a+b) & 2(a+b) & 2(a+b) \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} =$

$$= 2(a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} = 2(a+b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & a-b \\ a+b & -b & -a \end{vmatrix} = 2(a+b)\left(-a^2+ab-b^2\right) = -2(a^3+b^3)$$ şi că

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & (a+b)^2 & (a+b)^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = (a+b)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = (a+b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2 & a^2-b^2 & 2ab-b^2 \\ 2ab & b^2-2ab & a^2-2ab \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b)^2\left[\left(a^2-b^2\right)\left(a^2-2ab\right)+\left(b^2-2ab\right)\right] = (a+b)^2\left(a^4+b^4+a^2b^2-2a^3b+2a^2b^2-2ab^3\right) =$$

$$= (a+b)^2\left(a^2-ab+b^2\right)^2 = \left(a^3+b^3\right)^2 .$$ Ca urmare a celor stabilite anterior, rezultă că $\Delta_1^2 = 4\Delta_2$.

17. ***Arătați că, oricare ar fi*** $a,\ b,\ c,\ x \in \boldsymbol{R}$ ***, are loc egalitatea*** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ ax+b+c & bx+c+a & cx+a+b \end{vmatrix} = 0$ **.**

Soluție: Fie Δ determinantul considerat în enunțul problemei. Deoarece

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ (ax+b+c)-ax & (bx+c+a)-bx & (cx+a+b)-cx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ (b+c)+a & (c+a)+b & (a+b)+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b-a & c-a \\ a^2-bc & b^2-ca-(a^2-bc) & c^2-ab-(a^2-bc) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(a+b+c) & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix},$$

iar ultimul determinant este egal cu 0 (căci are liniile proporționale), rezultă că $\Delta = 0$.

18. ***Fie*** $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{C}$ **.** ***Calculați determinantul*** $\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+3)^2 \end{vmatrix}$ **.**

Soluție: Folosind proprietăți ale determinanților, deducem că

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2-a^2 & (a+3)^2-a^2 \\ b^2 & (b+1)^2-b^2 & (b+3)^2-b^2 \\ c^2 & (c+1)^2-c^2 & (c+3)^2-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 6c+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 6a+9-3(2a+1) \\ b^2 & 2b+1 & 6b+9-3(2b+1) \\ c^2 & 2c+1 & 6c+9-3(2c+1) \end{vmatrix} =$$

$$= 6\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ b^2 & 2b & 1 \\ c^2 & 2c & 1 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = -12(b-a)(c-a)(c-b) .$$

Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

19. ***Fie*** $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{C}$ **.** ***Calculați determinantul*** $\Delta = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$ **.**

Soluție: Folosind unele proprietăți ale determinanților, deducem că

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ b^2 & c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b) .$$

20. ***Fie*** $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$***. Calculați determinantul*** $\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & bc & c^2 \\ c^2 & ca & a^2 \end{vmatrix}$***, scriind rezultatul sub formă de produs.***

Soluție: Dacă $a = 0$, atunci $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ b^2 & bc & c^2 \\ c^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b^2 \begin{vmatrix} b^2 & bc \\ c^2 & 0 \end{vmatrix} = -b^3c^3$. Analog, dacă $b = 0$, atunci $\Delta = -c^3a^3$, iar dacă $c = 0$, atunci $\Delta = -a^3b^3$. Fie $abc \neq 0$. Atunci,

$$\Delta = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \left(\frac{b}{a}\right)^2 \\ 1 & \frac{c}{b} & \left(\frac{c}{b}\right)^2 \\ 1 & \frac{a}{c} & \left(\frac{a}{c}\right)^2 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2 \left(\frac{c}{b} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{c} - \frac{c}{b}\right) = \left(a^2 - bc\right)\left(b^2 - ca\right)\left(c^2 - ab\right).$$

21. ***Fie*** $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$***. Calculați determinantul*** $\Delta = \begin{vmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \sin 2a & \sin 2b & \sin 2c \\ \sin 3a & \sin 3b & \sin 3c \end{vmatrix}$***, scriind rezultatul sub formă de produs.***

Soluție: Deoarece $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, iar $\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$, rezultă că

$$\Delta = 2\sin a \sin b \sin c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ 3 - 4\sin^2 a & 3 - 4\sin^2 b & 3 - 4\sin^2 c \end{vmatrix} =$$

$$= 2\sin a \sin b \sin c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ 4\cos^2 a - 1 & 4\cos^2 b - 1 & 4\cos^2 c - 1 \end{vmatrix} = 2\sin a \sin b \sin c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ 4\cos^2 a & 4\cos^2 b & 4\cos^2 c \end{vmatrix} =$$

$$= 8\sin a \sin b \sin c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos^2 a & \cos^2 b & \cos^2 c \end{vmatrix} = 8\sin a \sin b \sin c (\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b).$$

Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

22. ***Calculați determinantul*** $\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$**.**

Soluție: Folosind unele proprietăți ale determinanților, deducem că

$$\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a)^2 - b^2 & b^2 \\ c^2 - (a+b)^2 & c^2 - (a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b-(b+c-a) & c-a-b-(c+a-b) & (a+b)^2 - a^2 - b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -b & -a & ab \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2+a(b+c-a) \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a(b+c) \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^2 \left[ab(b+c)(c+a-b) + ab^2(b+c-a) \right] =$$

$$= 2(a+b+c)^2 ab(ac+bc+c^2) = 2abc(a+b+c)^3 .$$

Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

23. ***Fie*** $x_1,\ x_2,\ x_3$ ***rădăcinile ecuației*** $x^3 - x - 1 = 0$ ***. Calculați determinantul*** $\Delta = \begin{vmatrix} x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ **.**

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că ecuația considerată nu admite rădăcini în $\boldsymbol{Q}$ și că $x_1 + x_2 + x_3 = 0,$ $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1,\ x_1x_2x_3 = 1$. Totodată, $x_k^3 - x_k - 1 = 0,\ (k = \overline{1,3})$, ceea ce implică $x_1^3 = x_1 + 1$, $x_2^3 = x_2 + 1$ și $x_3^3 = x_3 + 1$. Folosind atât aceste rezultate, cât și unele proprietăți ale determinanților, deducem că $\Delta = \begin{vmatrix} x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3+1 & x_1+x_2+x_3+1 & x_1+x_2+x_3+1 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3-x_2 & x_1-x_2 \\ x_3 & x_1-x_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix} = -(x_2-x_3)^2 - (x_1-x_2)(x_1-x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) =$$

$$= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - \left[(x_1+x_2+x_3)^2 - 2\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\right) \right] = -1 - 2 = -3 .$$

24. ***Fie*** $x_1,\ x_2,\ x_3$ ***rădăcinile ecuației*** $x^3 + 2x + \lambda = 0\ \ (\lambda \in \boldsymbol{R})$ ***și*** $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix}$ ***. Arătați că*** Δ ***nu depinde de*** λ **.**

Soluție: Dezvoltând determinantul considerat după regula lui Sarrus, obținem $\Delta = x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3 + x_1x_2x_3^2 -$ $-x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 = x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3) - (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)$. Deoarece $x_1^3 + 2x_1 + \lambda = 0$ (căci x_1 este rădăcină a ecuației din enunț), rezultă că $x_1^4 + 2x_1^2 + \lambda x_1 = 0$. Analog, $x_2^4 + 2x_2^2 + \lambda x_2 = 0$ și $x_3^4 + 2x_3^2 + \lambda x_3 = 0$. Adunând ultimele trei egalități membru cu membru, obținem $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + \lambda(x_1+x_2+x_3) = 0$, ceea ce conduce la $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -2\left[\left(x_1+x_2+x_3\right)^2 - 2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right) \right] - \lambda(x_1+x_2+x_3)$. Remarcând și faptul că $x_1 + x_2 + x_3 = 0,$, iar $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2$, conchidem că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 8$. Drept urmare, $\Delta = -8$, iar cerința enunțului a fost îndeplinită.

25. ***Fie*** $a,\ b \in \boldsymbol{R}^*$ ***și*** $x_1,\ x_2,\ x_3$ ***rădăcinile (presupuse reale) ale ecuației*** $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ **,** ***iar*** $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ **.** ***Arătați că*** $x_1 = x_2 = x_3$ ***dacă și numai dacă*** $\Delta = 0$ **.**

Soluție: Dacă $x_1 = x_2 = x_3$, atunci $\Delta = 0$ (căci Δ are liniile egale). Reciproc, să arătăm că, dacă $\Delta = 0$, atunci $x_1 = x_2 = x_3$. Evident, $\Delta = \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_1+x_2+x_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} =$

$= -(x_1+x_2+x_3)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1\right)$. Cum $x_1+x_2+x_3=-1$, rezultă că $\Delta = x_1^2+x_2^2+x_3^2$ $-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1 = \frac{1}{2}\left[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\right]$, ceea ce, împreună cu $\Delta=0$, conduce la $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=0$. Având în vedere că $x_1-x_2,\ x_2-x_3,\ x_3-x_1$ sunt numere reale (fiindcă $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \boldsymbol{R}$), conchidem că $x_1-x_2=0,\ x_2-x_3=0$ şi $x_3-x_1=0$, de unde $x_1=x_2=x_3$.

26. ***Fie*** $x_1,\ x_2,\ x_3$ ***rădăcinile ecuaţiei*** $x^3-x^2+x-2=0$***. Calculaţi determinantul*** $\Delta = \begin{vmatrix} x_1x_2 & x_2x_3 & x_3x_1 \\ x_2x_3 & x_3x_1 & x_1x_2 \\ x_3x_1 & x_1x_2 & x_2x_3 \end{vmatrix}$.

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, că ecuaţia nu are nici o rădăcină în $\boldsymbol{Q}$ şi că $x_1+x_2+x_3=1,$ $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1,\quad x_1x_2x_3=2$. Folosind aceste rezultate şi ţinând seama de proprietăţi ale determinanţilor, deducem că

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 & x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 & x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \\ x_2x_3 & x_3x_1 & x_1x_2 \\ x_3x_1 & x_1x_2 & x_2x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2x_3 & x_3x_1 & x_1x_2 \\ x_3x_1 & x_1x_2 & x_2x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2x_3 & x_3(x_1-x_2) & x_2(x_1-x_3) \\ x_3x_1 & x_1(x_2-x_3) & x_3(x_2-x_1) \end{vmatrix} = -x_3^2(x_1-x_2)^2 - x_1x_2(x_1-x_3)(x_2-x_3) =$$

$$= -x_3^2(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2) - x_1x_2(x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3+x_3^2) = x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2-\left(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_3^2\right) =$$

$$= x_1x_2x_3\left(x_1+x_2+x_3\right) - \left[\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)^2 - 2x_1x_2x_3\left(x_1+x_2+x_3\right)\right] = 2-(1-4) = 5.$$

27. ***Fie*** $x_1,\ x_2,\ x_3$ ***rădăcinile ecuaţiei*** $x^3-x-2=0$***. Calculaţi determinantul*** $\Delta = \begin{vmatrix} x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

Soluţie: Se arată cu uşurinţă că ecuaţia considerată nu are nici o rădăcină în $\boldsymbol{Q}$ şi că $x_1+x_2+x_3=0,$ $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-1,\ x_1x_2x_3=2$. Remarcăm şi faptul că $x_k^3-x_k-2=0,$, ceea ce conduce la $x_k^4-x_k^2-2x_k=0\ \ (k=\overline{1,3})$. Rezultă că $x_1^4=x_1^2+2x_1$, $x_2^4=x_2^2+2x_2$ şi $x_3^4=x_3^2+2x_3$. Folosind atât aceste rezultate cât, şi unele proprietăţi ale determinanţilor, deducem că

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2+2x_1 & x_2^2+2x_2 & x_3^2+2x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

Având în vedere că

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1^2\left(x_2x_3-x_1^2\right) - x_2^2\left(x_2^2-x_3x_1\right) + x_3^2\left(x_1x_2-x_3^2\right) = x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2-\left(x_1^4+x_2^4+x_3^4\right) =$$

$$= x_1x_2x_3\left(x_1+x_2+x_3\right) - \left(x_1^2+2x_1+x_2^2+2x_2+x_3^2+2x_3\right) =$$

$$= x_1x_2x_3\left(x_1+x_2+x_3\right) - \left[\left(x_1+x_2+x_3\right)^2 - 2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right) + 2\left(x_1+x_2+x_3\right)\right] = -2$$

şi că $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$, deducem că $\Delta = -2$.

28. ***Fie determinantul*** $\Delta(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^3\\ 1 & x^2 & x^6\end{vmatrix}$.

a) ***Calculați*** $\Delta(x)$.

b) ***Arătați că, dacă*** $a\in \boldsymbol{R}\setminus\{1\}$, ***atunci ecuația*** $\Delta(x)=0$ ***are cel puțin două rădăcini în*** $\boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R}$.

Soluție: a) Se arată cu ușurință că $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a-1 & a^3-1\\ 1 & x^2-1 & x^6-1\end{vmatrix}=(a-1)(x^6-1)-(a^3-1)(x^2-1)=$

$=(a-1)(x^2-1)(x^4+x^2+1)-(a-1)(a^2+a+1)(x^2-1)=(a-1)(x^2-1)(x^4+x^2-a^2-a)=$

$=(a-1)(x^2-1)(x^2-a)(x^2+a+1)$.

b) Deoarece $a\neq 1$, rezultă că $\Delta(x)=0\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-a)(x^2+a+1)=0$. Deducem imediat că:

- dacă $a\in(-\infty,\ -1]$, ecuația $\Delta(x)=0$ are două rădăcini în $\boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R}$, și anume $\pm i\sqrt{-a}$;
- dacă $a\in(-1,\ 0)$, ecuația $\Delta(x)=0$ are patru rădăcini în $\boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R}$, acestea fiind $\pm i\sqrt{-a}$, $\pm i\sqrt{a+1}$;
- dacă $a\in[0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$, ecuația $\Delta(x)=0$ are două rădăcini în $\boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R}$, și anume $\pm i\sqrt{a+1}$.

29. ***Aflați ce condiții trebuie să îndeplinească parametrii reali*** $a,\ b$ ***și*** c, ***astfel încât ecuația*** $\begin{vmatrix}x-a & b & c\\ c & x-a & b\\ b & c & x-a\end{vmatrix}=0$ ***să aibă toate rădăcinile în*** $\boldsymbol{R}$.

Soluție: Deoarece

$$\begin{vmatrix}x-a & b & c\\ c & x-a & b\\ b & c & x-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-a+b+c & x-a+b+c & x-a+b+c\\ c & x-a & b\\ b & c & x-a\end{vmatrix}=(x-a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ c & x-a & b\\ b & c & x-a\end{vmatrix}=$$

$$=(x-a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ c & x-a-c & b-c\\ b & c-b & x-a-b\end{vmatrix}=(x-a+b+c)\left[(x-a-c)(x-a-b)+(b-c)^2\right]=$$

$$=(x-a+b+c)\left[x^2-(a+2b+c)x+(a+b)(a+c)+(b-c)^2\right],$$

rezultă că ecuația considerată conduce la $x-a+b+c=0$ sau $x^2-(a+2b+c)x+(a+b)(a+c)+$ $+(b-c)^2=0$. Evident, prima dintre ecuații are rădăcina în $\boldsymbol{R}$. Remarcăm și faptul că ecuația inițială are toate rădăcinile în $\boldsymbol{R}$ dacă și numai dacă discriminantul Δ al celei de a doua dintre ultimele ecuații este pozitiv. Cum $\Delta=(a+2b+c)^2-4\left[(a+b)(a+c)+(b-c)^2\right]=-3(b-c)^2$, rezultă că $-3(b-c)^2\geq 0$, ceea ce are loc numai dacă $b=c$.

30. ***Fie*** $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{Z})$ ***o matrice simetrică (***$a_{ij}=a_{ji}$, ***oricare ar fi*** $i,\ j=\overline{1,3}$***). Arătați că, dacă elementele de pe diagonala principală a matricei*** A ***sunt egale, iar suma elementelor fiecărei linii este egală cu*** a, ***atunci*** $4a\det(A)$ ***este pătrat perfect.***

Soluție: Deoarece A este o matrice simetrică, iar $a_{11}=a_{22}=a_{33}$, rezultă că $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{11} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{11}\end{pmatrix}$. Întrucât $a_{11}+a_{12}+a_{13}=a,\ \ a_{12}+a_{11}+a_{23}=a$ și $a_{13}+a_{23}+a_{11}=a$, rezultă că $a_{13}=a_{23}$ și $2a_{13}+a_{11}=a$. Notând $a_{11}=b$, obținem $a_{13}=a_{23}=\dfrac{a-b}{2}$, ceea ce, împreună cu $a_{11}+a_{12}+a_{13}=a$, conduce la $a_{12}=\dfrac{a-b}{2}$. Deci,

$$\det(A)=\begin{vmatrix} b & \frac{a-b}{2} & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & b & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a-b}{2} & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & a \\ \frac{a-b}{2} & b & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a-b}{2} & b \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a-b}{2} & \frac{3b-a}{2} & 0 \\ \frac{a-b}{2} & 0 & \frac{3b-a}{2} \end{vmatrix}=\frac{a(3b-a)^2}{4},$$

de unde $4a\det(A)=a^2(3b-a)^2=\left[a(3b-a)\right]^2$. Cum $a,\ b\in\boldsymbol{Z}$, conchidem că $4a\det(A)$ este pătrat perfect.

31. ***Fie*** $x,\ y,\ z\in\boldsymbol{C}$ ***. Arătați că*** $\begin{vmatrix} (x^2+1)^2 & (xy+1)^2 & (zx+1)^2 \\ (xy+1)^2 & (y^2+1)^2 & (yz+1)^2 \\ (zx+1)^2 & (yz+1)^2 & (z^2+1)^2 \end{vmatrix}=2(y-x)^2(z-x)^2(z-y)^2$**.**

Soluție: Fie C matricea al cărei determinant trebuie să-l calculăm. Se observă cu destulă ușurință că $C=A\cdot B$, unde $A=\begin{pmatrix} 1 & 2x & x^2 \\ 1 & 2y & y^2 \\ 1 & 2z & z^2 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$. Având în vedere că $\det(C)=\det(AB)=$ $=\det(A)\det(B)$, iar $\det(A)=2(y-x)(z-x)(z-y)$ și $\det(B)=(y-x)(z-x)(z-y)$, rezultă că $\det(C)=2(y-x)^2(z-x)^2(z-y)^2$, ceea ce trebuia demonstrat.

32. ***Se consideră determinantul*** $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$**.** ***Folosind unele proprietăți ale determinanților, calculați*** Δ**.**

Soluție: Având în vedere că $\Delta=\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=$

$=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=20\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=20\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=160$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

33. ***Calculați determinantul*** $\Delta=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$**.**

Soluție: Folosind proprietăți ale determinanților, deducem că

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ a & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & b & 1-b \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}=$$

$=-a^2b\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix}=a^2b^2$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

34. ***Rezolvați ecuația*** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x^2-2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & x^2-8 \end{vmatrix} = 0$.

Soluție: Deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x^2-2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & x^2-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & x^2-4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-9 \end{vmatrix} = \left(x^2-9\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x^2-4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -10\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right),$$

ecuația din enunț este echivalentă cu $\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)=0$. Deci, soluțiile ecuației sunt: -3, -2, 2 și 3.

35. ***Fie*** $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ ***. Calculați determinantul*** $\begin{vmatrix} a^2 & (a-1)^2 & (a+2)^2 & (a-3)^2 \\ b^2 & (b-1)^2 & (b+2)^2 & (b-3)^2 \\ c^2 & (c-1)^2 & (c+2)^2 & (c-3)^2 \\ d^2 & (d-1)^2 & (d+2)^2 & (d-3)^2 \end{vmatrix}$.

Soluție: Ținând seama de unele proprietăți ale determinanților, deducem că

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a-1)^2-a^2 & (a+2)^2-a^2 & (a-3)^2-a^2 \\ b^2 & (b-1)^2-b^2 & (b+2)^2-b^2 & (b-3)^2-b^2 \\ c^2 & (c-1)^2-c^2 & (c+2)^2-c^2 & (c-3)^2-c^2 \\ d^2 & (d-1)^2-d^2 & (d+2)^2-d^2 & (d-3)^2-d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 1-2a & 4+4a & 9-6a \\ b^2 & 1-2b & 4+4b & 9-6b \\ c^2 & 1-2c & 4+4c & 9-6c \\ d^2 & 1-2d & 4+4d & 9-6d \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 1-2a & 4+4a+2(1-2a) & 9-6a-3(1-2a) \\ b^2 & 1-2b & 4+4b+2(1-2b) & 9-6b-3(1-2b) \\ c^2 & 1-2c & 4+4c+2(1-2c) & 9-6c-3(1-2c) \\ d^2 & 1-2d & 4+4d+2(1-2d) & 9-6d-3(1-2d) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 1-2a & 6 & 6 \\ b^2 & 1-2b & 6 & 6 \\ c^2 & 1-2c & 6 & 6 \\ d^2 & 1-2d & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

36. ***Se consideră determinanții:*** $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ***și*** $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Calculați $\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3$.

Soluție: Deoarece $\Delta_2 - \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+3 & 6 & 7 \\ 1 & 0+1 & 2 & 2 \\ -3 & 1+1 & 1 & 2 \\ 4 & 3-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

rezultă că $\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 20$.

37. **F*ie*** $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ ***și*** $\Delta_1 = \begin{vmatrix} bcd & a & a^2 & a^3 \\ cda & b & b^2 & b^3 \\ dab & c & c^2 & c^3 \\ abc & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$. ***Fără a calcula determinanții, arătați că*** $\Delta_1 = \Delta_2$.

Soluție: Dacă $abcd \neq 0$, atunci $\Delta_1 = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}\cdot\begin{vmatrix} abcd & a^2 & a^3 & a^4 \\ abcd & b^2 & b^3 & b^4 \\ abcd & c^2 & c^3 & c^4 \\ abcd & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = \Delta_2$.

Dacă $a = 0$, atunci $\Delta_1 = \begin{vmatrix} bcd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & c & c^2 & c^3 \\ 0 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = bcd\begin{vmatrix} b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \\ d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = b^2c^2d^2\begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$, iar

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2 & b^3 & b^4 \\ c^2 & c^3 & c^4 \\ d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = b^2c^2d^2\begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix}, \text{ deci } \Delta_1 = \Delta_2.$$

Analog, arătăm că, dacă $b = 0$ sau $c = 0$ sau $d = 0$, atunci $\Delta_1 = \Delta_2$.

38. ***Rezolvați ecuația*** $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2x+1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2x-1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2x+1 \end{vmatrix} = 0$**.**

Soluție: Fie Δ determinantul din membrul întâi al ecuației considerate. Folosind unele proprietăți ale determinanților deducem că

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2x+8 & 2x+8 & 2x+8 & 2x+8 \\ 2 & 2x+1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2x-1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2x+1 \end{vmatrix} = (2x+8)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2x+1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2x-1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2x+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2x+8)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2x-1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2x-4 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 2x-3 \end{vmatrix} = (2x+8)\begin{vmatrix} 2x-1 & 2 & -1 \\ 1 & 2x-4 & -1 \\ -3 & -2 & 2x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (2x+8)\begin{vmatrix} 2x-4 & 0 & 2x-4 \\ 1 & 2x-4 & -1 \\ -3 & -2 & 2x-3 \end{vmatrix} = (2x+8)(2x-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2x-4 & -1 \\ -3 & -2 & 2x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(x+4)(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2x-4 & -2 \\ -3 & -2 & 2x \end{vmatrix} = 16(x+4)(x-2)(x^2-2x-1).$$

Drept urmare, ecuația din enunț este echivalentă cu $(x+4)(x-2)(x^2-2x-1) = 0$, iar rădăcinile ei sunt: $x_1 = -4,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1-\sqrt{2},\ x_4 = 1+\sqrt{2}$.

39. ***Fie*** $a, b \in \boldsymbol{Z}$**,** $a \neq b$ ***şi determinantul*** $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3a & b+2a & a+2b & 3b \\ 3a^2 & a^2+2ab & b^2+2ab & 3b^2 \\ a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 \end{vmatrix}$**. *Arătați că*** d ***este cubul unui număr natural nenul.***

Soluție: Scăzând în determinantul considerat coloana a treia din coloana a patra, coloana a doua din coloana a

treia şi prima coloană din coloana a doua, obţinem $d=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3a & b-a & b-a & b-a \\ 3a^2 & 2ab-2a^2 & b^2-a^2 & 2b^2-2ab \\ a^3 & a^2b-a^3 & ab^2-a^2b & b^3-ab^2 \end{vmatrix}$, de unde

$d=\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ 2ab-2a^2 & b^2-a^2 & 2b^2-2ab \\ a^2b-a^3 & ab^2-a^2b & b^3-ab^2 \end{vmatrix}=(b-a)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & b+a & 2b \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix}=(b-a)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & b-a & 2(b-a) \\ a^2 & a(b-a) & (b-a)(b+a) \end{vmatrix}=$

$=(b-a)^5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b+a \end{vmatrix}=(b-a)^6$. Drept urmare, $d=\left[(b-a)^2\right]^3$. Cum $a,\ b\in \boldsymbol{Z}$, $a\neq b$, rezultă că $(b-a)^2\in \boldsymbol{N}^*$, ceea ce arată că cerinţa problemei a fost îndeplinită.

40. ***Fie*** $a,\ b,\ c,\ d\in \boldsymbol{R}$ ***. Calculaţi determinantul*** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$**.**

Soluţie: Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$. Se arată cu destulă uşurinţă că $A^tA=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$, unde $k=a^2+b^2+c^2+d^2$. Drept urmare, $\det(A^tA)=k^4$, ceea ce conduce la $\det(A)\det({}^tA)=k^4$. Cum $\det({}^tA)=\det(A)$, rezultă că $(\det A)^2=k^4$, ceea ce conduce la $\det(A)=\pm\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$. Ţinând seama şi de faptul că, în suma se reprezintă $\det(A)$, coeficientul lui a^4 este 1, conchidem că $\det(A)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$.

41. ***Arătaţi că funcţia*** $f:\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})\to \boldsymbol{R}$**,** $f(A)=\det(A)$ ***este surjectivă, dar nu este injectivă.***

Soluţie: Întrucât, pentru orice $a\in R$, există matricea $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ astfel încât $f(A)=a$ (căci $\det(A)=a$), rezultă că funcţia f este surjectivă. Fie $A_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (evident $A_1,\ A_2\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$). Având în vedere că $A_1\neq A_2$, iar $f(A_1)=f(A_2)$ (fiindcă $\det(A_1)=\det(A_2)=2$), deducem că funcţia f nu este injectivă.

42. ***Se consideră matricea*** $A\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$**.** ***Arătaţi că, dacă*** $\det(A^2+I_2)=0$**,** ***atunci*** $A^2=-I_2$.

Soluţie: Evident, $\det(A^2+I_2)=0\Rightarrow\det\left[(A+iI_2)(A-iI_2)\right]=0\Rightarrow\det(A+iI_2)\det(A-iI_2)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow\det(A+iI_2)=0$ sau $\det(A-iI_2)=0$.

1) Să considerăm cazul în care $\det(A+iI_2)=0$. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ($a,\ b,\ c,\ d\in R$). Cum $A+iI_2=$

$=\begin{pmatrix} a+i & b \\ c & d+i \end{pmatrix}$, rezultă că $\det(A+iI_2)=ad-bc-1+i(a+d)$, ceea ce conduce la $ad-bc-1+\ i(a+d)=0$, de unde $ad-bc=1$ şi $a+d=0$ (căci $ad-bc-1\in R$ şi $a+d\in R$). Drept urmare, $d=-a$ şi $a^2+bc=-1$.

Rezultă că $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ şi $a^2+bc=-1$, de unde $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I_2$, ceea ce trebuia demonstrat.

2) În cazul în care $\det(A-iI_2)=0$, procedând în acelaşi mod, obţinem $A^2+I_2=O_2$.

43. ***Fie*** $A\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$***. Arătaţi că, dacă există*** $n\in\boldsymbol{N}$**,** $n\geq 2$ ***astfel încât*** $A^n=O_2$**, atunci** $A^2=O_2$**.**

Soluţie: Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Deoarece $A^n=O_2$, rezultă că $\det(A^n)=0$, ceea ce implică $(\det A)^n=0$, de unde $\det(A)=0$ (căci $n\in N^*$). Ţinând seama şi de faptul că $A^2-(a+d)A+(\det A)I_2=O_2$ (relaţia lui Cayley), deducem că $A^2=(a+d)A$. Demonstrăm, apoi, prin inducţie că $A^n=(a+d)^{n-1}A$ (oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}$, $n\geq 2$**)**. Remarcând şi faptul că $A^n=O_2$, conchidem că $(a+d)^{n-1}A=O_2$, ceea ce are loc dacă şi numai dacă $a+d=0$ sau $A=O_2$.

1) Fie $a+d=0$. Atunci, având în vedere că $A^2=(a+d)A$, deducem că $A^2=O_2$.

2) Dacă $A=O_2$, atunci $A^2=O_2$.

44. ***Determinaţi matricele*** $A\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$**,** ***ştiind că*** $A^4=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$**.**

Soluţie: Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ($a,\ b,\ c,\ d\in\boldsymbol{R}$) una dintre matricele căutate. Evident, $\det(A^4)=0$. Cum $\det(A^4)=\left[\det(A)\right]^4$, rezultă că $\det(A)=0$. Totodată, $A^2-(a+d)A+(\det A)I_2=O_2$ (relaţia lui Cayley), deci $A^2=(a+d)A$. Remarcând şi faptul că $A^4=A^2A^2$, deducem că $A^4=(a+d)^3A$, ceea ce conduce la $A^4=\begin{pmatrix} (a+d)^3a & (a+d)^3b \\ (a+d)^3c & (a+d)^3d \end{pmatrix}$. Cum $A^4=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, rezultă că $(a+d)^3a=3$, $(a+d)^3b=-6$, $(a+d)^3c=1$, $(a+d)^3d=-2$. Adunând membru cu membru egalităţile $(a+d)^3a=3$ şi $(a+d)^3d=-2$, obţinem $(a+d)^4=1$, de unde $a+d=1$ sau $a+d=-1$ (căci $a+d\in R$). Dacă $a+d=1$, atunci $a=3$, $b=-6$, $c=1$, $d=-2$, iar dacă $a+d=-1$, atunci $a=-3$, $b=6$, $c=-1$, $d=2$. Ca urmare a celor stabilite anterior, matricele $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sunt soluţiile problemei.

45. a) ***Arătaţi că*** $\det(\overline{A})=\overline{\det(A)}$**,** ***oricare ar fi*** $A\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{C})$**.**

b) ***Fie*** $A,\ B\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ ***astfel încât*** $AB=BA$**.** ***Arătaţi că*** $\det\left(A^2+B^2\right)\geq 0$**.**

Soluţie: a) Fie $A=(a_{ij}),\ i,\ j=\overline{1,3}$ şi $a_{ij}\in\boldsymbol{C}$. Este binecunoscut faptul că $\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$. Cum $\overline{A}=(\overline{a}_{ij}),\ i,j=\overline{1,3}$, iar $\overline{z_1+z_2+...+z_n}=\overline{z}_1+\overline{z}_2+...+\overline{z}_n$ şi $\overline{z_1z_2...z_n}=\overline{z}_1\overline{z}_2...\overline{z}_n$, oricare ar fi $z_1,\ z_2,\ ...,\ z_n\in C$, rezultă că

$$\det(\overline{A})=\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\overline{a}_{33}+\overline{a}_{12}\overline{a}_{23}\overline{a}_{31}+\overline{a}_{13}\overline{a}_{21}\overline{a}_{32}-\overline{a}_{13}\overline{a}_{22}\overline{a}_{31}-\overline{a}_{12}\overline{a}_{21}\overline{a}_{33}-\overline{a}_{11}\overline{a}_{23}\overline{a}_{32}=$$
$$=\overline{a_{11}a_{22}a_{33}}+\overline{a_{12}a_{23}a_{31}}+\overline{a_{13}a_{21}a_{32}}-\overline{a_{13}a_{22}a_{31}}-\overline{a_{12}a_{21}a_{33}}-\overline{a_{11}a_{23}a_{32}}=$$
$$=\overline{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}=\overline{\det(A)}.$$

b) Remarcăm, mai întâi, faptul că $\overline{A}=A$ şi $\overline{B}=B$ (căci $A,\ B\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$). Totodată,

$$\det(A^2+B^2)=\det(A^2-i^2B^2)=\det\left((A+iB)(A-iB)\right)=\det(A+iB)\det(A-iB)=\det(A+iB)\det(\overline{A+iB})=$$
$$=\det(A+iB)\overline{\det(A+iB)}.$$ Fie $a+ib==\det(A+iB)$, $a,\ b\in\boldsymbol{R}$. Atunci, $\overline{\det(A+iB)}=a-ib$. Drept urmare, $\det(A^2+B^2)=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2\geq 0$ (fiindcă $a,\ b\in\boldsymbol{R}$), ceea ce trebuia să demonstrăm.

46. ***Într-un reper cartezian*** xOy***, se consideră punctele*** $A(1,\ 3)$, $B(2,\ 1)$ ***şi*** $C(a,\ a-4)$ $(a \in \boldsymbol{R})$**.** ***Determinaţi*** a***, astfel încât punctele*** $A,\ B$ ***şi*** C ***să fie coliniare.***

Soluţie: Punctele considerate sunt coliniare dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & a-4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, ceea ce conduce la $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ a-1 & a-7 & 0 \end{vmatrix} = 0$, de unde $3a - 9 = 0$ şi, deci, $a = 3$.

47. ***Într-un reper cartezian*** xOy***, se consideră punctele*** $A(1,\ 1)$, $B(2,\ -1)$, $C(m,\ 2n+1)$ ***şi*** $D(1-2m,\ n-5)$**.** ***Determinaţi*** $m,\ n \in \boldsymbol{R}$***, astfel încât punctele*** $A,\ B,\ C$ ***şi*** D ***să fie coliniare.***

Soluţie: Punctele considerate sunt coliniare dacă şi numai dacă $C \in AB$ şi $D \in AB$, ceea ce are loc atunci şi numai atunci când $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ m & 2n+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ şi $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1-2m & n-5 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Calculând cei doi determinanţi, deducem că $m + n - 1 = 0$, respectiv $4m - n + 6 = 0$, de unde $m = -1$ şi $n = 2$.

48. ***Într-un reper cartezian*** xOy***, se consideră punctele*** $A_n(2-3n,\ 1+n)$ $(n \in \boldsymbol{N})$**.** ***Arătaţi că aceste puncte sunt coliniare.***

Soluţie: Evident, punctele considerate sunt coliniare dacă şi numai dacă $A_n \in A_0A_1$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$ şi $n \geq 2$. Cum $A_0(2,\ 1)$, $A_1(-1,\ 2)$, iar $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-3n & 1+n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3n & n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3n & n \end{vmatrix} = 0$, cerinţa anterioară este îndeplinită.

49. ***Într-un reper cartezian*** xOy***, se consideră punctele*** $A(2,\ 0)$, $B(6,\ 0)$, $C(0,\ -2)$ ***şi*** $D(0,\ 6)$**.** ***Fie*** E ***mijlocul lui*** $[AD]$ ***şi*** F ***mijlocul lui*** $[BC]$**.** ***Arătaţi că mijloacele segmentelor*** $AC,\ BD$ ***şi*** EF ***sunt coliniare.***

Soluţie: Se arată cu uşurinţă că $E(1,\ 3)$ şi $F(3,\ -1)$. Fie M mijlocul lui $[AC]$, N mijlocul lui $[BD]$ şi P mijlocul lui $[EF]$. Deducem imediat că $M(1,\ -1)$, $N(3,\ 3)$ şi $P(2,\ 1)$. Remarcând că $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, conchidem că punctele $M,\ N$ şi P sunt coliniare.

50. ***Într-un reper cartezian*** xOy***, se consideră punctele*** $A(6,\ 0)$, $B(0,\ 4)$ ***şi*** $C(1,\ 5)$**.** ***Arătaţi că picioarele perpendicularelor din*** O ***pe dreptele*** $BC,\ CA$ ***şi*** AB ***sunt coliniare.***

Soluţie: Fie $D = pr_{BC}O$, $E = pr_{CA}O$ şi $F = pr_{AB}O$. Deoarece $B(0,\ 4)$ şi $C(1,\ 5)$, rezultă că ecuaţia dreptei BC este $x - y + 4 = 0$. Având în vedere că $m_{OD} = -1$ (căci $OD \perp BC$ şi $m_{BC} = 1$), iar $O(0,\ 0)$, deducem că ecuaţia dreptei OD este $y = -x$. Rezolvând sistemul format din ecuaţiile dreptelor BC şi OD, obţinem $x = -2$ şi $y = 2$. Deci, $D(-2,\ 2)$ (fiindcă $BC \cap OD = \{D\}$). Analog, stabilim că ecuaţiile dreptelor CA şi OE sunt $x + y - 6 = 0$, respectiv $x - y = 0$ şi că $E(3,\ 3)$. În acelaşi mod, arătăm că ecuaţiile dreptelor AB şi OF sunt $2x + 3y - 12 = 0$, respectiv $3x - 2y = 0$ şi că $F\left(\frac{24}{13},\ \frac{36}{13}\right)$.

Remarcând şi faptul că $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ \frac{24}{13} & \frac{36}{13} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ \frac{50}{13} & \frac{10}{13} & 0 \end{vmatrix} = 0$, deducem că punctele D, E şi F sunt coliniare.

51. ***Într-un reper cartezian*** xOy***, se consideră punctele*** $A(a,\ a^2)$, $B\left(a+1,\ (a+1)^2\right)$ ***şi*** $C\left(a+2,\ (a+2)^2\right)$ $(a \in \boldsymbol{R})$***. Arătaţi că*** $\mathcal{A}[ABC]$ ***nu depinde de*** a***.***

Soluţie: Evident, $\mathcal{A}\,[ABC] = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ a+1 & (a+1)^2 & 1 \\ a+2 & (a+2)^2 & 1 \end{vmatrix}$. Remarcând că

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a+2 & (a+2)^2 \end{vmatrix} = (a+1-a)(a+2-a)(a+2-a-1) = 2,$$

deducem că $\mathcal{A}[ABC] = 1$, ceea ce arată că cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

52. ***Într-un reper cartezian*** xOy***, se consideră punctele*** $A(1,\ 2)$, $B(2,\ -1)$ ***şi*** $C(a,\ a+1)$***. Determinaţi*** $a \in R$***, astfel încât*** $\mathcal{A}[ABC] = 2$**.**

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, că $\mathcal{A}\,[ABC] = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & a+1 & 1 \end{vmatrix}$. Cum $\Delta = 4(a-1)$, rezultă că $\mathcal{A}\,[ABC] = 2\,|a-1|$. Totodată, $\mathcal{A}[ABC] = 2$, deci $|a-1| = 1$, de unde $a = 0$ sau $a = 2$.

53. ***Într-un reper cartezian*** xOy***, se consideră punctele*** $A(2,\ 3)$, $B(2m+1,\ 2)$ ***şi*** $C(3,\ 2m+2)$ $(m \in R)$**.** ***Determinaţi valoarea lui*** m***, pentru care*** $\mathcal{A}[ABC]$ ***este minimă.***

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, că $\mathcal{A}\,[ABC] = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2m+1 & 2 & 1 \\ 3 & 2m-1 & 1 \end{vmatrix}$. Având în vedere că

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2m-1 & -1 & 0 \\ 1 & 2m-1 & 0 \end{vmatrix} = (2m-1)^2 + 1$, deducem că $\mathcal{A}\,[ABC] = \frac{1}{2}\left[(2m-1)^2+1\right]$. Cum $(2m-1)^2 \geq 0$,

oricare ar fi $m \in R$, rezultă că $\mathcal{A}\,[ABC] \geq \frac{1}{2}$, oricare ar fi $m \in R$. Deci, valoarea minimă pentru $\mathcal{A}[ABC]$ este $\frac{1}{2}$, iar această valoare este luată atunci când $2m-1=0$, ceea ce conduce la $m = \frac{1}{2}$.

54. ***Într-un reper cartezian*** xOy***, se consideră dreapta*** h ***având ecuaţia*** $5x - y - 15 = 0$ ***şi punctele*** $A(-1,\ -1)$, $B(4,\ 5)$, $C \in h$**.** ***Determinaţi coordonatele punctului*** C***, ştiind că*** $\mathcal{A}[ABC] = 9{,}5$**.**

Soluţie: Având în vedere că $A \notin h$, deducem că punctele A, B şi C sunt necoliniare. Fie $C(a,\ b)$. Întrucât $C \in h$, rezultă că $b = 5a - 15$ şi, deci, $C(a,\ 5a-15)$. Evidenţiind faptul că $\mathcal{A}\,[ABC] = \frac{1}{2}|\Delta|$ şi că

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ a & 5a-15 & 1 \end{vmatrix} = 19(a-4)$, deducem că $\mathcal{A}[ABC] = 9{,}5\,|a-4|$. Totodată, $\mathcal{A}[ABC] = 9{,}5$, deci $|a-4| = 1$, de unde $a = 3$ sau $a = 5$. Drept urmare, $C(3,\ 0)$ sau $C(5,\ 10)$.

55. ***Într-un reper cartezian*** xOy***, se consideră punctele*** $A(-1,\ 0)$, $B(3,\ 2)$, $C(-2,\ 1)$, $D(2,\ 1)$ ***şi dreapta*** h ***având ecuaţia*** $x - y + 1 = 0$. ***Determinaţi coordonatele punctului*** M, ***ştiind că*** $M \in h$ ***şi că*** $\mathcal{A}[MAB] = \mathcal{A}[MCD]$.

Soluţie: Fie $M(a,\ b)$. Întrucât $M \in h$, rezultă că $b = a + 1$ şi, deci, $M(a,\ a+1)$. Remarcăm faptul că $\mathcal{A}[MAB] = \frac{1}{2}|\Delta_1|$ şi $\mathcal{A}[MCD] = \frac{1}{2}|\Delta_2|$, unde $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & a+1 & 1 \end{vmatrix}$, iar $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 1 \end{vmatrix}$. Având în vedere că $\Delta_1 = 2(a+1)$, $\Delta_2 = 4a$ şi $\mathcal{A}[MAB] = \mathcal{A}[MCD]$, deducem că $|a+1| = 2|a|$, de unde $a = 1$ sau $a = -\frac{1}{3}$. Drept urmare, $M(1,\ 2)$ sau $M\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$.

Probleme propuse

1. Calculaţi determinanţii: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+2i & -2i \\ i & 1-2i \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1-2\cos a & 2\sin a+3 \\ 2\sin a-3 & 1+2\cos a \end{vmatrix}$, $\Delta_4 = \begin{vmatrix} (a-b)(a+bi) & b^2-ab \\ a & a-bi \end{vmatrix}$.

2. Fie ε una dintre rădăcinile cubice complexe ale unităţii. Calculaţi determinanţii $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2\varepsilon & \varepsilon-1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2+\varepsilon \end{vmatrix}$ şi $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon^2+1 & \varepsilon+1 \\ -1 & \varepsilon^2 \end{vmatrix}$.

3. Fie $x \in \boldsymbol{R}$ şi determinantul $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 \\ \cos 3x & 2 \end{vmatrix}$. Rezolvaţi ecuaţia $\Delta(x) = 3$.

4. Arătaţi că $\det(A+B) + \det(A-B) = 2\big(\det(A) + \det(B)\big)$, oricare ar fi $A,\ B \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$.

5. **a)** Arătaţi că $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, oricare ar fi $A,\ B \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$.

b) Demonstraţi că $\det(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \cdot \ldots \cdot \det(A_n)$, oricare ar fi $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Deduceţi, apoi, că $\det(A^n) = \big(\det(A)\big)^n$, oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$ şi oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$.

6. Se consideră determinanții $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ și $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}$. Arătați că $\Delta_2 = \Delta_1^2$.

7. Calculați determinanții: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 14 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & i \\ i & -1 & i \\ 2 & -2i & 1+i \end{vmatrix}$.

8. Fie ω $(\omega \neq 1)$ una dintre rădăcinile ecuației $x^5 - 1 = 0$. Calculați determinantul $\begin{vmatrix} \omega & -\omega & 0 \\ 0 & \omega^2 & -1 \\ 1 & \omega & \omega+1 \end{vmatrix}$.

9. Calculați determinanții: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & b & a \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & a \\ a & b & a \end{vmatrix}$.

10. Rezolvați ecuația $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & x^2 & 2x \end{vmatrix} = 0$.

11. Rezolvați ecuația $\begin{vmatrix} 2x & -2x & 1 \\ x^2 & -x^2 & -1 \\ 4-2x & x-2 & x-2 \end{vmatrix} = 0$.

12. Fără a calcula determinanții, arătați că $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

13. Calculați determinanții: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a-b & a(b-c) & 1 \\ b-c & b(c-a) & 2 \\ c-a & c(a-b) & -3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1-x & 2-3x & 3-5x \\ \dfrac{1}{x^2+1}+1 & \dfrac{1}{x^2+1}+3 & \dfrac{1}{x^2+1}+5 \end{vmatrix}$.

14. Fie $a_k,\ b_k,\ c_k \in \boldsymbol{R},\ k = \overline{1,3}$. Arătați că: $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & a_2-b_3 \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & a_3-b_3 \end{vmatrix} = 0$ și $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

15. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + nA$. Arătați că $\det(B) \neq 0$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$.

16. Fie $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$. Calculați determinanții:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2b & 3c \\ a^2 & 4b^2 & 9c^2 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b-1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c-1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}.$$

17. Fie $a, b, c \in \boldsymbol{C}$. Calculați determinantul $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$, scriind rezultatul sub formă de produs.

18. Fie $a, b, c \in \boldsymbol{C}$. Calculați determinanții $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a+b & ab \\ 1 & b+c & bc \\ 1 & c+a & ca \end{vmatrix}$ și $\Delta_2 = \begin{vmatrix} ab & a+b & a^2+b^2 \\ bc & b+c & b^2+c^2 \\ ca & c+a & c^2+a^2 \end{vmatrix}$, scriind fiecare dintre rezultatele obținute sub formă de produs.

19. Fie $a, b, c \in \boldsymbol{C}$. Calculați în două moduri determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$ și, apoi, arătați că $a^4(c-b) - b^4(c-a) + c^4(b-a) = (b-a)(c-a)(c-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$.

20. Fie $a, b, c \in C$. Calculați în două moduri determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ și, apoi, arătați că $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$.

21. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Calculați determinantul $\begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} \\ \sqrt{ab} & \sqrt{bc} & \sqrt{ca} \\ \frac{2ab}{a+b} & \frac{2bc}{b+c} & \frac{2ca}{c+a} \end{vmatrix}$, scriind rezultatul sub formă de produs.

22. Arătați că în orice triunghi ABC are loc egalitatea $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{\cos A}{a^2} & \frac{\cos B}{b^2} & \frac{\cos C}{c^2} \end{vmatrix} = 0$.

23. Fie $a, b \in \boldsymbol{R}$. Arătați că ecuația $\begin{vmatrix} x & a & b \\ b & x & a \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$ are numai rădăcini reale dacă și numai dacă $a = b$. În acest caz, rezolvați ecuația.

24. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$. Calculați determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_1x_2 \end{vmatrix}$.

25. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - 3x - 1 = 0$. Calculați determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

26. Fie $x_1,\ x_2,\ x_3$ rădăcinile ecuației $x^3+3x-3=0$. Calculați determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

27. Fie $x_1,\ x_2,\ x_3$ rădăcinile ecuației $x^3-3x^2+2x-2=0$. Calculați determinantul

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1+x_2 & x_2-(x_1+x_3) & x_3+x_2 \\ x_1+x_3 & x_2+x_3 & x_3-(x_1+x_2) \\ x_1-(x_2+x_3) & x_2+x_1 & x_3+x_1 \end{vmatrix}.$$

28. Arătați că, dacă un determinant de ordinul patru are cel puțin 13 elemente egale cu 0, atunci determinantul este nul.

29. Arătați că, dacă un determinant de ordinul patru are cel puțin 14 elemente egale, atunci determinantul este nul.

30. Calculați determinanții: $\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, $\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

31. Calculați determinanții: $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

32. Calculați determinanții: $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

33. Fie $a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$. Calculați determinantul $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$.

34. Fie $a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$. Calculați determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.

35. Fie $a,\ b,\ c,\ d\in\boldsymbol{C}$. Calculați determinantul $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

36. Fie $a,\ b \in \boldsymbol{C}$. Calculați determinantul $\begin{vmatrix} b & -1 & 0 & 0 \\ ab & b & -1 & 0 \\ a^2b & ab & b & -1 \\ a^3b & a^2b & ab & b \end{vmatrix}$.

37. Fie $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{C}$. Calculați determinantul $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$.

38. Calculați determinanții: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & a & y & c \\ 1 & a & b & z \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -y & y & 0 \\ 0 & 0 & -z & z \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & x & 1 & 0 \\ c & 0 & x & 1 \\ d & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$.

39. Calculați determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$, scriind rezultatul sub formă de produs.

40. Fie $a,\ b,\ c,\ d \in \boldsymbol{R}$. Calculați determinantul $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos^2 a & \cos^3 a \\ 1 & \cos b & \cos^2 b & \cos^3 b \\ 1 & \cos c & \cos^2 c & \cos^3 c \\ 1 & \cos d & \cos^2 d & \cos^3 d \end{vmatrix}$, scriind rezultatul sub formă de produs.

41. Rezolvați ecuația $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+4 & x+3 & x+2 & x+1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$.

42. Fie $a,\ b,\ c$ trei numere reale și distincte. Rezolvați ecuația $\begin{vmatrix} bcx & cax & abx & abc \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

43. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}$. Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$, cu proprietatea că $X^4 = A$.

44. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$. Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$, cu proprietatea că $X^3 = A$.

45. Arătați că, dacă $A \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{Q})$ și $\det\left(A^2 - 2I_2\right) = 0$, atunci $A^2 = 2I_2$.

46. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(-1,\ 1)$, $B(3,\ 7)$ și $C(-3,\ -2)$. Arătați că aceste puncte sunt coliniare.

47. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(a,\ b)$, $B(b,\ a)$ și $C(-a,\ 2a+b)$. Arătați că aceste puncte sunt coliniare, oricare ar fi $a,\ b \in \boldsymbol{R}$.

48. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(1,\ 1)$, $B(2,\ -1)$, $C(-1,\ 5)$ şi $D(0,\ 3)$. Arătaţi că aceste puncte sunt coliniare.

49. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(1,\ 1)$, $B(-2,\ 2)$ şi $C(3a-8,\ a+2)$. Determinaţi $a \in \boldsymbol{R}$, astfel încât aceste puncte să fie coliniare.

50. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(8,\ 0)$, $B(3,\ 6)$ şi $C(0,\ 3)$. Fie D intersecţia dreptei BC cu axa Ox, iar E intersecţia dreptei AB cu axa Oy. Arătaţi că mijloacele segmentelor OB, AC şi DE sunt coliniare.

51. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(2,\ 3)$, $B(3,\ 1)$ şi $C(1,\ 1)$. Aflaţi $\mathcal{A}[ABC]$.

52. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(2,\ 1)$, $B(-2,\ 5)$, $C(-4,\ 3)$ şi $D(-1,\ -1)$. Aflaţi $\mathcal{A}[ABCD]$.

53. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(2,\ 3)$, $B(4,\ m+4)$, $C(m+3,\ 5)$. Determinaţi $m \in \boldsymbol{R}$, ştiind că $\mathcal{A}[ABC] = \frac{3}{2}$.

54. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(2,\ 2)$, $B(5,\ 1)$ şi dreapta h având ecuaţia $x-2y+8=0$. Determinaţi punctul $C \in h$, ştiind că $\mathcal{A}[ABC] = 17$.

55. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(3,\ 2)$, $B(0,\ 4)$, $C(-2,\ 0)$, $D(2,\ -2)$ şi dreapta h având ecuaţia $x-y-1=0$. Determinaţi punctul $M \in h$, ştiind că $3\mathcal{A}[MAB] = 5\mathcal{A}[MCD]$.

Răspunsuri

1. $\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = 3,\ \Delta_3 = 6,\ \Delta_4 = a^3 - b^3$ **2.** $\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \varepsilon$ **3.** $x \in \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\} \cup \{2k\pi\},\ k \in \boldsymbol{Z}$

7. $\Delta_1 = \Delta_2 = 0,\ \Delta_3 = 4i - 2$ **8.** -1 **9.** $\Delta_1 = ab,\ \Delta_2 = a(a-b)^2,\ \Delta_3 = (a+b)(a-b)^2$ **10.** $x \in \{1,\ 9\}$

11. $x \in \{-2,\ 0,\ 2\}$ **13.** $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ **16.** $\Delta_1 = (2b-a)(3c-a)(3c-2b),\ \Delta_2 = 4(b-a)(c-a)(c-b),$ $\Delta_3 = (b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ca)$ **17.** $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ **18.** $\Delta_1 = (a-b)(a-c)(b-c)$, $\Delta_2 = -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

21. $(a+b)(b+c)(c+a)\left(\frac{\sqrt{bc}}{b+c} - \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right)\left(\frac{\sqrt{ca}}{c+a} - \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right)\left(\frac{\sqrt{ca}}{c+a} - \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\right)$ **23.** $x_1 = x_2 = a,\ x_3 = -2a$

24. $\Delta = 5$ **25.** $\Delta = -9$ **26.** $\Delta = 54$ **27.** $\Delta = 45$ **30.** $\Delta_1 = 5,\ \Delta_2 = -4,\ \Delta_3 = 74$ **31.** $\Delta_1 = 12,\ \Delta_2 = 1,$ $\Delta_3 = 1$ **32.** $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = 9$ **33.** $a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab+bc+ca)$ **34.** $(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)(c-b)$

35. 0 **36.** $b(a+b)^3$ **37.** $-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ **38.** $\Delta_1 = (x-a)(y-b)(z-c),$ $\Delta_2 = xyz(a+b+c+d),\ \Delta_3 = ax^3 - bx^2 + cx - d$ **39.** $(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$

40. $(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b)(\cos d - \cos a)(\cos d - \cos b)(\cos d - \cos c)$ **41.** $x_1 = -5,$ $x_2 = -1,\ x_3 = x_4 = 1$ **42.** $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_3 = c$ **43.** $X = \frac{1}{8}A$ sau $X = -\frac{1}{8}A$ **44.** $X = \frac{1}{4}A$ sau $X = \frac{\varepsilon}{4}A$ sau $X = \frac{\varepsilon^2}{4}A$, unde ε este una dintre rădăcinile cubice complexe ale unităţii **49.** $a = 1$ **51.** 2 **52.** 17

53. $m \in \left\{-1-\sqrt{7},\ -2,\ 0,\ -1+\sqrt{7}\right\}$ **54.** $C(12,\ 10)$ sau $C\left(-\frac{76}{5},\ -\frac{18}{5}\right)$ **55.** $M(1,\ 0)$ sau $M(-3,\ -4)$.

CAPITOLUL IV

MATRICE INVERSABILE. ECUAȚII MATRICEALE

Probleme rezolvate

1. ***Fie*** $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$***. Arătați că, dacă*** $AB = I_n$***, atunci*** A ***este inversabilă şi*** $A^{-1} = B$**.**

Soluție: Întrucât $AB = I_n$, rezultă că $\det(AB) = 1$, ceea ce conduce la $\det(A)\det(B) = 1$, de unde $\det(B) \neq 0$. Rezultă că matricea B este inversabilă; fie B^{-1} inversa matricei B. Remarcăm şi faptul că $AB = I_n \Rightarrow B(AB) = B \Rightarrow (BA)B = B \Rightarrow \big[(BA)B\big]B^{-1} = BB^{-1} \Rightarrow (BA)(BB^{-1}) = I_n \Rightarrow BA = I_n$. Drept urmare, $AB = BA = I_n$, ceea ce arată că matricea A este inversabilă şi că $A^{-1} = B$.

2. ***Arătați că, dacă matricea*** $A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$ ***este inversabilă, atunci*** $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$**.**

Soluție: Deoarece $AA^{-1} = I_n$, rezultă că $\det(AA^{-1}) = \det(I_n)$, ceea ce conduce la $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$, de unde $\det(A^{-1}) = \big(\det(A)\big)^{-1}$ (căci $\det(A) \neq 0$).

3. ***Se consideră matricea*** $A \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$***. Arătați că, dacă matricea*** $I_3 + A$ ***este inversabilă, atunci*** $\big(I_3 + A\big)^{-1}\big(I_3 - A\big) = \big(I_3 - A\big)\big(I_3 + A\big)^{-1}$**.**

Soluție: Deoarece $\big(I_3 + A\big)\big(I_3 + A\big)^{-1} = \big(I_3 + A\big)^{-1}\big(I_3 + A\big)$, rezultă că $\big(I_3 + A\big)^{-1} + A\big(I_3 + A\big)^{-1} = \big(I_3 + A\big)^{-1} + \big(I_3 + A\big)^{-1}A$, de unde $A\big(I_3 + A\big)^{-1} = \big(I_3 + A\big)^{-1}A$. Deducem că $\big(I_3 + A\big)^{-1}\big(I_3 - A\big) = \big(I_3 + A\big)^{-1} - \big(I_3 + A\big)^{-1}A = \big(I_3 + A\big)^{-1} - A\big(I_3 + A\big)^{-1} = I_3\big(I_3 + A\big)^{-1} - A\big(I_3 + A\big)^{-1} = \big(I_3 - A\big)\big(I_3 + A\big)^{-1}$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

4. ***Se consideră matricele*** $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ***şi*** $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$**.**

a) ***Arătați că matricele*** $A,\ B$ ***şi*** AB ***sunt inversabile.***

b) ***Calculați*** $A^{-1},\ B^{-1},\ (AB)^{-1}$ ***şi, apoi, verificați că*** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$**.**

Soluție: **a)** Remarcăm, mai întâi, că $AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Deoarece $\det(A) = 1 \neq 0$, $\det(B) = 1 \neq 0$ şi $\det(AB) = 1 \neq 0$, rezultă că matricele $A,\ B$ şi AB sunt nesingulare, deci inversabile.

b) Se arată cu uşurință că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ şi $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$. Ținând seama şi de faptul că $B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$, deducem că $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5. ***Se consideră matricea*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix}$**.**

a) ***Calculați*** A^2**.**

b) ***Arătați că*** A ***este inversabilă şi determinați inversa ei.***

Soluție: a) Evident, $A^2=\begin{pmatrix}1&4&-2\\2&3&-2\\4&8&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&-2\\2&3&-2\\4&8&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$.

b) Deoarece $AA=I_3$, rezultă că matricea A este inversabilă și că $A^{-1}=A$.

6. ***Arătați că matricea*** $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$ ***este inversabilă și, apoi, calculați inversa ei.***

Soluție: Întrucât $\det(A)=1\neq 0$, rezultă că matricea A este nesingulară, deci inversabilă. Remarcând că $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}A^*$, deducem că $A^{-1}=A^*$. Cum $A_{11}=3,\ A_{21}=-3,\ A_{31}=1,\ A_{12}=-3,\ A_{22}=5,\ A_{32}=-2,$ $A_{13}=1,\ A_{23}=-2$ și $A_{33}=1$, rezultă că $A^*=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-3&5&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$. Drept urmare, $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-3&5&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$.

7. ***Găsiți o matrice*** $A\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{Q})$***, astfel încât*** A ***să fie inversabilă și, totodată, inversa ei să aibă toate elementele numere naturale nenule.***

Soluție: Fie $B\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{N}^*)$ o matrice inversabilă. Remarcând că $B=\left(B^{-1}\right)^{-1}$, putem considera că $A=B^{-1}$. De exemplu, să considerăm matricea $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. Deoarece $\det(B)=4\neq 0$, rezultă că B este inversabilă. Remarcând că $B_{11}=B_{22}=B_{33}=3,\quad B_{12}=B_{13}=B_{21}=B_{23}=B_{31}=B_{32}=-1$, deducem că $B^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$. Drept urmare, matricea $A=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$ este o soluție a problemei.

8. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ ***și*** $C=\begin{pmatrix}-1&-4&2\\-2&-3&2\\-4&-8&5\end{pmatrix}$**.**

a) ***Arătați că matricea*** A ***este inversabilă și, apoi, aflați*** A^{-1}**.**

b) ***Demonstrați că*** $ABA^{-1}=C$**.**

Soluție: a) Deoarece $\det(A)=1\neq 0$, rezultă că matrice A este inversabilă. Remarcăm că $A^*=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-2&-4&3\\1&2&-1\end{pmatrix}$. Având în vedere și faptul că $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}A^*$, deducem că $A^{-1}=A^*$.

b) Se arată cu ușurință că $AB=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&0&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}$. Cum

$$ABA^{-1}=(AB)A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&0&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-2&-4&3\\1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-4&2\\-2&-3&2\\-4&-8&5\end{pmatrix},$$

rezultă că $ABA^{-1}=C$.

9. ***Se consideră matricea*** $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -2x & 3x^2\\ 0 & 1 & -3x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $(x\in \boldsymbol{R})$ **.**

a) ***Arătați că*** $A(x)A(y)=A(x+y)$**,** ***oricare ar fi*** $x,\ y\in \boldsymbol{R}$**.**

b) ***Demonstrați că*** $A(x)$ ***este inversabilă și, apoi, determinați*** $A^{-1}(x)$**.**

Soluție: a) Având în vedre că $A(x)A(y)=$

$$=\begin{pmatrix}1 & -2x & 3x^2\\ 0 & 1 & -3x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2y & 3y^2\\ 0 & 1 & -3y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2x-2y & 3y^2+6xy+3x^2\\ 0 & 1 & -3x-3y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2(x+y) & 3(x+y)^2\\ 0 & 1 & -3(x+y)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y),$$

oricare ar fi $x,\ y\in R$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

b) Deoarece $\det\big(A(x)\big)=1$, rezultă că matricea $A(x)$ este inversabilă. Remarcând și faptul că $A_{11}=1,\ A_{12}=0,\ A_{13}=0,\ A_{21}=2x,\ A_{22}=1,\ A_{23}=0,\ A_{31}=3x^2,\ A_{32}=3x$ și $A_{33}=1$, deducem că

$$A^{-1}(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 1 & 3x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Observație: Întrucât $A(x)A(-x)=A(0)=I_3$, rezultă că matricea $A(x)$ este inversabilă și că $A^{-1}(x)=A(-x)$.

10. ***Fie*** $a\in \boldsymbol{R}$ ***și matricea*** $A=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ a^2 & 1 & a\\ a & a^2 & 1\end{pmatrix}$**.**

a) ***Determinați valorile lui*** a ***pentru care matricea*** A ***este inversabilă.***

b) ***Aflați valorile lui*** a ***pentru care există o matrice*** $B\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$**,** ***astfel încât*** $B\neq O_3$ ***și*** $AB=O_3$

Soluție: a) Deoarece $\det(A)=(a-1)^2(a^2+a+1)^2$, iar $a\in \boldsymbol{R}$, rezultă că $\det(A)=0$ dacă și numai dacă $a=1$. Prin urmare, matricea A este inversabilă oricare ar fi $a\in \boldsymbol{R}\setminus\{1\}$.

b) Fie $a\neq 1$. În acest caz, $AB=O_3\Leftrightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}O_3\Leftrightarrow I_3B=O_3\Leftrightarrow B=O_3$, ceea ce arată că $a\neq 1$ nu convine. Fie $a=1$. Atunci, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Se observă cu uşurinţă că luând $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$, obținem $AB=O_3$. Cum $B\neq O_3$, concluzionăm că $a=1$ este soluția problemei.

11. ***Determinați*** $m\in \boldsymbol{R}$**,** ***astfel încât matricea*** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\ 0 & x & -1\\ m & 1 & 2\end{pmatrix}$ ***să fie inversabilă pentru orice*** $x\in \boldsymbol{R}$**.**

Soluție: Evident, matricea A este inversabilă pentru orice $x\in \boldsymbol{R}$ dacă și numai dacă $\det(A)\neq 0$ (oricare ar fi $x\in \boldsymbol{R}$). Cum $\det(A)=-mx^2+2x-2m+1$, cerința anterioară impune ca $mx^2-2x+2m-1\neq 0$, oricare ar fi $x\in \boldsymbol{R}$, ceea ce are loc când ecuația $mx^2-2x+2m-1=0$ (ca ecuație în necunoscuta x) nu are rădăcinile în $\boldsymbol{R}$, condiție îndeplinită dacă $\Delta<0$ (Δ notează discriminantul acestei ecuații). Remarcând faptul că $\Delta=-2m^2+m+1$, deducem că $2m^2-m-1>0$, de unde $m\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)\cup(1,\ +\infty)$.

12. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ ***şi*** $B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$. ***Arătaţi că*** $AB=A+B$ ***şi că matricea*** $A-I_3$ ***este inversabilă, iar*** $(A-I_3)^{-1}=B-I_3$.

Soluţie: Deoarece $AB=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-2&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$ şi $A+B=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-2&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$, rezultă că $AB=A+B$. Remarcând că $(A-I_3)(B-I_3)=AB-A-B+I_3=A+B-A-B+I_3=I_3$, deducem că matricea $A-I_3$ este inversabilă, iar $(A-I_3)^{-1}=B-I_3$.

13. ***Fie*** $A,\ B\in\mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ ***două matrice inversabile. Arătaţi că , dacă*** $AB=BA$ ***, atunci*** $A^{-1}B=BA^{-1}$.

Soluţie: Evident, $AB=BA\Rightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}(BA)\Rightarrow(A^{-1}A)B=(A^{-1}B)A\Rightarrow I_nB=(A^{-1}B)A\Rightarrow B=(A^{-1}B)A\Rightarrow$ $\Rightarrow BA^{-1}=\left[(A^{-1}B)A\right]A^{-1}\Rightarrow BA^{-1}=(A^{-1}B)(AA^{-1})\Rightarrow BA^{-1}=A^{-1}B$. Astfel, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

14. ***Fie*** $A\in\mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$ ***o matrice cu proprietatea că există*** $p\in\boldsymbol{N}^*$ ***astfel încât*** $I_n+A+A^2+...+A^p=O_n$. ***Arătaţi că*** A ***este inversabilă şi că*** $A^{-1}=A^p$.

Soluţie: Înmulţind ambii membri ai egalităţii din enunţ cu A, obţinem $A+A^2+A^3+...+A^{p+1}=O_n$, ceea ce conduce la $I_n+A+A^2+...+A^p+\left(A^{p+1}-I_n\right)=O_n$, de unde $A^{p+1}-I_n=O_n$. Prin urmare, $A^{p+1}=I_n$, egalitate echivalentă cu $AA^p=I_n$. Rezultă că matricea A este inversabilă şi că $A^{-1}=A^p$.

15. ***Se consideră matricele*** $A,\ B\in\mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$ ***satisfăcând condiţiile*** $A+B=I_n$ ***şi*** $A^3=A^2$.

a) ***Arătaţi că*** $A^2B^2=O_n$.

b) ***Demonstraţi că matricea*** I_n+AB ***este inversabilă şi, apoi, determinaţi inversa ei.***

Soluţie: a) Deoarece $B=I_n-A$ şi $A^3=A^2$, rezultă că $A^2B^2=A^2(I_n-A)^2=A^2(I_n-2A+A^2)=$ $=A^2-2A^3+A^4=A^2-2A^2+A^3A=-A^2+A^2A=-A^2+A^3=-A^2+A^2=O_n$.

b) Remarcând că $(I_n+AB)(I_n-AB)=I_n-(AB)^2=I_n-A^2B^2=I_n-O_n=I_n$, deducem că matricea I_n+AB este inversabilă şi că $(I_n+AB)^{-1}=I_n-AB$ (căci $A+B=I_n\Rightarrow AB=BA$, de unde $(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B=A(AB)B=(AA)(BB)=A^2B^2$).

16. ***Fie*** $A,\ B\in\mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$. ***Arătaţi că, dacă*** $AB=A+B$ ***, atunci:***

a) $AB=BA$ ***;***

b) ***matricea*** A ***este inversabilă dacă şi numai dacă matricea*** B ***este inversabilă.***

Soluţie: a) Evident, $AB=A+B\Rightarrow AB-A-B+I_n=I_n\Rightarrow(AB-AI_n)-(B-I_n)=I_n\Rightarrow$ $\Rightarrow A(B-I_n)-I_n(B-I_n)=I_n\Rightarrow(A-I_n)(B-I_n)=I_n$. Din ultima egalitate deducem că $A-I_n$ este inversabilă şi că $(A-I_n)^{-1}=B-I_n$. Rezultă că $(B-I_n)(A-I_n)=I_n$, ceea ce conduce la $BA-B-A+I_n=I_n$, de unde $BA=A+B$. Drept urmare, $AB=BA$.

b) Deoarece $A+B=BA$, rezultă că $A=BA-BI_n$, de unde $A=B(A-I_n)$, ceea ce implică $\det(A)=\det(B)\det(A-I_n)$. Remarcând şi faptul că $\det(A-I_n)\neq0$ (căci matricea $A-I_n$ este inversabilă), deducem că $\det(A)\neq0$ atunci şi numai atunci când $\det(B)\neq0$. Prin urmare, matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă matricea B este inversabilă.

17. ***Fie matricele*** $A,\ B\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{C})$ ***, iar*** A ***nesingulară. Arătaţi că matricea*** I_3+AB ***este inversabilă dacă şi numai dacă matricea*** I_3+BA ***este inversabilă.***

Soluție: Remarcând că $\det(I_3+AB)=\det(AA^{-1}+ABAA^{-1})=\det\left[A(A^{-1}+BAA^{-1})\right]=\det\left[A(I_3+BA)A^{-1}\right]=$ $=\det(A)\det(I_3+BA)\det(A^{-1})=\det(I_3+BA)$ (căci $\det(A)\det(A^{-1})=1$), deducem că $\det(I_3+AB)\neq 0$ dacă şi numai dacă $\det(I_3+BA)\neq 0$, ceea ce arată că matricea I_3+AB este inversabilă dacă şi numai dacă matricea I_3+BA este inversabilă.

18. ***Fie*** $a,\ b\in(0,\infty)$ ***şi matricea*** $A\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$***. Arătați că, dacă*** $\det(A)>0$***, atunci*** $\det(aA+bA^{-1})\geq 0$**.**

Soluție: Evidențiem, mai întâi, faptul că matricea A^{-1} există (căci $\det(A)\neq 0$). Remarcând că $\det\left[\left(\sqrt{a}A\right)^2+\left(\sqrt{b}I_3\right)^2\right]=\det\left(aA^2+bI_3\right)=\det\left(aA^2+bAA^{-1}\right)=\det\left[A\left(aA+bA^{-1}\right)\right]=\det(A)\det\left(aA+bA^{-1}\right)$, iar $\det\left[\left(\sqrt{a}A\right)^2+\left(\sqrt{b}I_3\right)^2\right]\geq 0$ şi $\det(A)>0$, deducem că $\det(aA+bA^{-1})\geq 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

19. ***Fie*** $x\in\boldsymbol{Z}$ ***şi matricea*** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2x+1 & 3x+1\\ 2 & x+1 & 2x+1\end{pmatrix}$***. Arătați că matricea*** A ***este inversabilă şi, apoi, determinați valorile lui*** x ***pentru care*** $A^{-1}=A^*$ **(** A^* ***notează adjuncta matricei*** A**).**

Soluție: Întrucât $\det(A)=x^2-3x+1$, iar $x^2-3x+1\neq 0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{Z}$, rezultă că $\det(A)\neq 0$, ceea ce arată că matricea A este inversabilă. Evidențiind faptul că $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}A^*$, deducem că egalitatea $A^{-1}=A^*$ are loc dacă şi numai dacă $\det(A)=1$, ceea ce conduce la $x^2-3x+1=1$, de unde $x^2-3x=0$ şi, deci, $x=0$ sau $x=3$.

20. ***Fie*** $x\in\boldsymbol{C}\setminus\{1\}$ ***şi matricea*** $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ 1 & x+2 & 2x+1 & x\\ 1 & 2x+1 & x^2+2x & x^2\\ 1 & 3x & 3x^2 & x^3\end{pmatrix}$**.**

a) ***Arătați că matricea*** A ***este inversabilă.***

b) ***Determinați valorile lui*** x ***pentru care*** $A^{-1}=A^*$**.**

Soluție: a) Deoarece

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ 0 & x-1 & 2(x-1) & x-1\\ 0 & 2(x-1) & (x-1)(x+3) & (x-1)(x+1)\\ 0 & 3(x-1) & 3(x-1)(x+1) & (x-1)(x^2+x+1)\end{vmatrix}=(x-1)^3\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & x+3 & x+1\\ 3 & 3x+3 & x^2+x+1\end{vmatrix}=$$

$$=(x-1)^3\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & x-1 & x-1\\ 3 & 3(x-1) & (x-1)(x+2)\end{vmatrix}=(x-1)^5\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & x+2\end{vmatrix}=(x-1)^6,$$

iar $x\neq 1$, rezultă că $\det(A)\neq 0$, ceea ce arată că matricea A este inversabilă.

b) Având în vedere că $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}A^*$, deducem că $A^{-1}=A^*$ dacă şi numai dacă $\det(A)=1$, ceea ce conduce la $(x-1)^6=1$. Cum $(x-1)^6=1\Leftrightarrow(x-1)^6=\cos 0+i\sin 0\Leftrightarrow x_k-1=\cos\dfrac{k\pi}{3}+i\sin\dfrac{k\pi}{3},\ k=\overline{0,5}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_k=1+\cos\dfrac{k\pi}{3}+i\sin\dfrac{k\pi}{3},\ k=\overline{0,5}$, rezolvarea problemei este încheiată.

21. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$**.**

a) ***Arătați că*** $A^3=A$**.**

b) ***Determinați*** $a,\ b,\ c\in \boldsymbol{R}$**,** ***astfel încât*** $(I_3+A+A^2)(aI_3+bA+cA^2)=I_3$**.** ***Deduceți, apoi, că matricea*** $B=I_3+A+A^2$ ***este inversabilă și determinați*** B^{-1}**.**

Soluție: a) Stabilim cu ușurință că $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Cum $A^3=A^2A$, rezultă că $A^3=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=A$.

b) Evident, $(I_3+A+A^2)(aI_3+bA+cA^2)=I_3\Leftrightarrow aI_3+bA+cA^2+aA+bA^2+cA^3+aA^2+bA^3+cA^4=I_3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow aI_3+bA+cA^2+aA+bA^2+cA+aA^2+bA+cA^2=I_3\Leftrightarrow aI_3+(a+2b+c)A+(a+b+2c)A^2=I_3$, ceea ce are loc dacă și numai dacă $a=1,\ a+2b+c=0$ și $a+b+2c=0$, de unde $a=1$ și $b=c=-\frac{1}{3}$. Drept urmare, $(I_3+A+A^2)\left(I_3-\frac{1}{3}A-\frac{1}{3}A^2\right)=I_3$. Ținând seama de ultima egalitate, deducem că matricea B este inversabilă și că $B^{-1}=I_3-\frac{1}{3}A-\frac{1}{3}A^2$.

22. ***Arătați că matricea*** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ ***este inversabilă și, apoi, calculați inversa ei.***

Soluție: Deoarece $\det(A)=-16\neq 0$, rezultă că matricea A este inversabilă. Din faptul că $A^2=4I_4$ deducem că $A\left(\frac{1}{4}A\right)=I_4$, cea ce arată că $A^{-1}=\frac{1}{4}A$.

23. ***Fie matricea*** $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$**.** ***Arătați că matricea*** A ***este inversabilă și, apoi, aflați*** A^{-1}**.**

Soluție: Deoarece $\det A=-3\neq 0$, rezultă că matricea A este inversabilă. Din faptul că $A^2=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=2A+3I_4$, deducem că $A\left(\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I_4\right)=I_4$, ceea ce arată că $A^{-1}=\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I_4$, deci $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

24. ***Fie*** $A\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$**.** ***Determinați matricea*** A**,** ***știind că*** $A^*=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$**.**

Soluție: Fie $d=\det(A)$. Deoarece $AA^*=d\ I_3$, rezultă că $\det(AA^*)=\det(d\ I_3)$, ceea ce conduce la

$(\det A)\left(\det(A^*)\right)=d^3$. Cum $\det(A^*)=16$, deducem că $16d=d^3$, de unde $d=0$ sau $d^2=16$. Dacă $d=0$, atunci $AA^*=O_3$. Întrucât A^* este inversabilă (căci $\det A^*\neq 0$), ultima egalitate implică $A=O_3$, ceea ce nu este posibil (fiindcă $A=O_3\Rightarrow A^*=O_3$). Rămâne singura posibilitate ca $d^2=16$, de unde $d=4$ sau $d=-4$. Din $AA^*=d\,I_3$, deducem că $A=(d\,I_3)(A^*)^{-1}$, ceea ce conduce la $A=d(A^*)^{-1}$. Cum $(A^*)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, conchidem că $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ sau $A=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$.

25. ***Fie*** $A,\,B\in\mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$ ***două matrice nesingulare. Arătați că*** $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ***şi că*** $(AB)^*=B^*A^*$**.**

Soluție: Fie $d_1=\det(A)$ şi $d_2=\det(B)$. Deoarece matricele A şi B sunt nesingulare, rezultă că $d_1\neq 0$ şi $d_2\neq 0$. Remarcând şi faptul că $\det(AB)=d_1d_2$, deducem că $\det(AB)\neq 0$, ceea ce arată că AB este nesingulară. Totodată, $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AI_nA^{-1}=AA^{-1}=I_n$, deci $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. Întrucât $(AB)^*=\det(AB)(AB)^{-1}=d_1d_2(B^{-1}A^{-1})$, iar $B^*A^*=(d_2B^{-1})(d_1A^{-1})=(d_1d_2)(B^{-1}A^{-1})$, rezultă că $(AB)^*=B^*A^*$.

26. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}$ ***şi*** $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$**.** ***Rezolvați ecuația matriceală*** $AXB=C$**.**

Soluție: Remarcând faptul că $\det(A)=1$ şi $\det(B)=1$, deducem că matricele A şi B sunt inversabile; fie A^{-1} inversa matricei A şi B^{-1} inversa matricei B. Rezultă că $AXB=C\Leftrightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$. Ținând seama şi de faptul că $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$, iar $B^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$, conchidem că $X=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$.

27. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&1&4\\1&0&2\end{pmatrix}$ ***şi*** $B=\begin{pmatrix}6&0\\4&0\\2&-1\end{pmatrix}$**.** ***Rezolvați ecuația matriceală*** $AX=B$**.**

Soluție: Întrucât $\det A=5\neq 0$, rezultă că matricea A este inversabilă. Remarcând că $A^*=\begin{pmatrix}2&2&-5\\-2&3&-5\\-1&-1&5\end{pmatrix}$, deducem că $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&2&-5\\-2&3&-5\\-1&-1&5\end{pmatrix}$. Evidențiind faptul că $AX=B\Leftrightarrow X=A^{-1}B$, conchidem că

$$X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&2&-5\\-2&3&-5\\-1&-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0\\4&0\\2&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10&5\\-10&5\\0&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-2&1\\0&-1\end{pmatrix}.$$

28. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$ ***şi*** $B=\begin{pmatrix}2&2&3\\5&3&6\\7&6&10\end{pmatrix}$**.**

a) ***Rezolvați ecuația matriceală*** $XA=B$**.**

b) ***Fie matricea*** X ***soluția ecuației considerate. Determinați*** X^n $(n\in N^*)$**.**

Soluție: **a)** Deoarece $\det(A) = -1 \neq 0$, rezultă că matricea A este inversabilă. Evidențiem și faptul că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Întrucât $XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$, rezultă că

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Remarcăm, mai întâi, că $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + D$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Cum $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $D^k = O_3$, oricare ar fi $k \in \boldsymbol{N}^*$ și $k \geq 3$, rezultă că

$$X^n = (I_3 + D)^n = I_3 + C_n^1 D + C_n^2 D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ n(2n+1) & 2n & 1 \end{pmatrix}.$$

29. ***Se consideră matricele*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***și*** $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. ***Determinați matricea*** $X \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$, ***știind că*** $A(X^{-1} + B) = C$.

Soluție: Întrucât $\det A \neq 0$, rezultă că matricea A este inversabilă; fie A^{-1} inversa matricei A. Evident, $A(X^{-1} + B) = C \Leftrightarrow X^{-1} + B = A^{-1}C \Leftrightarrow X^{-1} = A^{-1}C - B$. Având în vedere că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, deducem că $A^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, ceea ce conduce la $A^{-1}C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Astfel, egalitatea $X^{-1} = A^{-1}C - B$ conduce la $X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Notând $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, egalitatea anterioară devine $X^{-1} = D$, de unde $X^{-1}X = DX$, ceea ce este totuna că $DX = I_2$. Fie D^{-1} inversa lui D (D^{-1} există, căci $\det(D) \neq 0$). Rezultă că $D^{-1}(DX) = D^{-1}I_2$, de unde $X = D^{-1}$. Având în vedere că $D^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, deducem că $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

30. ***Se consideră matricele*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***și*** $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. ***Determinați matricea*** X ***având elementele în*** $\boldsymbol{R}$, ***știind că*** $A^2X - 2A^{-1}X = 3B$.

Soluție: Evident, egalitatea din enunț este echivalentă cu $(A^2 - 2A^{-1})X = 3B$. Remarcăm și faptul că ultima egalitate este posibilă numai dacă $X \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$. Se arată cu ușurință că $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, iar

$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Deci, $A^2-2A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Notând $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, egalitatea $(A^2-2A^{-1})X=3B$ devine $3CX=3B$, de unde $CX=B$. Având în vedere că $\det(C)=1$, deducem că matricea C este inversabilă. Înmulțind, la stânga, ambii membri ai ultimei egalități cu C^{-1}, obținem $X=C^{-1}B$. Întrucât $C^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, iar $C^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, rezultă că $X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

31. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$ ***şi*** $B=\begin{pmatrix}-7 & 5\\ 25 & -12\end{pmatrix}$**.** ***Determinați matricele*** $X,\ Y\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$**,** ***știind că*** $XY=YX,\ X-Y=A$ ***şi*** $X^2-Y^2=B$**.**

Soluție: Deoarece $X^2-Y^2=(X-Y)(X+Y)$ (căci $XY=YX$), egalitatea $X^2-Y^2=B$ este echivalentă cu $(X-Y)(X+Y)=B$, ceea ce conduce la $A(X+Y)=B$ (fiindcă $X-Y=A$), de unde $X+Y=A^{-1}B$ (căci $\det(A)\neq 0$ implică faptul că matricea A este inversabilă). Având în vedere că $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ şi că $A^{-1}B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 15 & 1\end{pmatrix}$, deducem că $X+Y=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 15 & 1\end{pmatrix}$. Totodată, $X-Y=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$, deci $2X=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 15 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 10 & 4\end{pmatrix}$, de unde $X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$. Cum $Y=X-A$, rezultă că $Y=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 10 & -1\end{pmatrix}$.

32. ***Se consideră matricele*** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ ***şi*** $C=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$**.** ***Determinați matricea*** $X\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$**,** ***știind că*** $\det(X)=1$ ***şi că*** $AX^2+BX+C=O_2$**.**

Soluție: Deoarece $\det(X)\neq 0$, rezultă că matricea X este inversabilă; fie X^{-1} inversa matricei X. Evident, $AX^2+BX+C=O_2\Leftrightarrow(AX+B)X=-C\Leftrightarrow AX+B=-CX^{-1}$. Fie $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ $(x,\ y,\ z,\ t\in R)$. Cum $\det(X)=1$, rezultă că $X^{-1}=\begin{pmatrix}t & -y\\ -z & x\end{pmatrix}$. Atunci, $AX+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}x+2z+1 & y+2t+2\\ z+2 & t-1\end{pmatrix}$, iar $-CX^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t & -y\\ -z & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4z-4t & 4x+4y\\ t & -y\end{pmatrix}$. Ținând seama şi de faptul că $AX+B=-CX^{-1}$, deducem că $\begin{pmatrix}x+2z+1 & y+2t+2\\ z+2 & t-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4z-4t & 4x+4y\\ t & -y\end{pmatrix}$, ceea ce conduce la $x+2z+1=-4z-4t,\ y+2t+2=4x+4y,\ z+2=t$ şi $t-1=-y$. Rezolvând acest sistem, obținem $x=1$, $y=0,\ z=-1,\ t=1$. Deci, $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Probleme propuse

1. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ o matrice nesingulară. Arătați că, dacă $A^{-1} = A$, atunci $|\det(A)| = 1$.

2. Fie $A,\ B \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$. Arătați că, dacă matricea A este inversabilă, atunci

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B).$$

3. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Stabiliți care dintre aceste matrice este inversabilă și, atunci când este cazul, determinați inversa respectivei matrice.

4. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Arătați că matricele A și B sunt inversabile. Calculați A^{-1}, B^{-1} și $(AB)^{-1}$. Verificați, apoi, că $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = I_2 + A + A^2 + \ldots + A^{2006}$. Arătați că matricea B este inversabilă și, apoi, calculați B^{-1}.

6. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați A^2. Deduceți, apoi, că matricea A este inversabilă și stabiliți A^{-1}.

7. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că fiecare dintre aceste matrice este inversabilă și, apoi, calculați A^{-1}, B^{-1} și C^{-1}.

8. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că matricele $A,\ B$ și AB sunt inversabile. Calculați A^{-1}, B^{-1} și $(AB)^{-1}$. Verificați, apoi, că $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

9. Fie $a,\ b \in \boldsymbol{R}^*$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{pmatrix}$. Arătați că matricea A este inversabilă și, apoi, calculați A^{-1}.

10. Fie $a \in \boldsymbol{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 1 \\ \sin a & \cos a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că matricea A este inversabilă și, apoi, calculați A^{-1}.

11. Determinați valorile lui $a \in \boldsymbol{R}$, astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ să fie inversabilă. Pentru a astfel determinat, calculați A^{-1}.

12. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x-1 & x & x+1 \\ (x-1)^2 & x^2 & (x+1)^2 \end{pmatrix}$. Arătați că matricea A este inversabilă pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$. Pentru $x=2$, calculați A^{-1}.

13. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ și $B=I_3+xA+x^2A^2+\ldots+x^{100}A^{100}$. Arătați că matricea B este inversabilă oricare ar fi $x \in \boldsymbol{R}$. Determinați, apoi, B^{-1}.

14. Fie ε una dintre rădăcinile cubice complexe ale unității și matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$. Calculați A^4. Stabiliți, apoi, că matricea A este inversabilă și determinați A^{-1}.

15. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Arătați că $A^3=I_3$. Deduceți, apoi, că matricea A este inversabilă și stabiliți A^{-1}.

16. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Arătați că $A^2=4A-3I_3$. Deduceți, apoi, că matricea A este inversabilă și determinați A^{-1}.

17. Fie $a \in \boldsymbol{R}$ și matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=I_3+aA$.

a) Arătați că $A^2=O_3$.

b) Demonstrați că $2B-B^2=I_3$. Deduceți, apoi, că matricea B este inversabilă și determinați B^{-1}.

18. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^2=7A$.

b) Demonstrați că matricea I_3+A este inversabilă și că $(I_3+A)^{-1}=I_3-\frac{1}{8}A$.

19. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^3=O_3$.

b) Demonstrați că $(I_3+A)(I_3-A+A^2)=I_3$. Deduceți, apoi, că matricea I_3+A este inversabilă și determinați $(I_3+A)^{-1}$

20. Fie $a \in \boldsymbol{R}$ și matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & x & -1 \\ a & 1 & x \end{pmatrix}$. Determinați valorile lui a, pentru care matricea A este inversabilă oricare ar fi $x \in \boldsymbol{R}$.

21. Determinați valorile lui $a \in \boldsymbol{R}$, pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ este inversabilă oricare ar fi $x \in \boldsymbol{R}$.

22. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} x & x+1 & 2x+1 \\ x+1 & x-2 & 2x-1 \\ 1 & 2x & 3x \end{pmatrix}$. Determinați valorile lui $x \in \boldsymbol{R}$, astfel încât $A^{-1} = A^*$.

23. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ x & x+1 & x+2 & x+3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$. Determinați valorile lui $x \in \boldsymbol{C}$, astfel încât $A^{-1} = A^*$.

24. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $AX = B$.

25. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Rezolvați ecuația matriceală $AX = B$.

b) X fiind soluția ecuației anterioare, calculați X^n $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

26. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 11 & -14 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $AXB = C$.

27. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $AXB = C$.

28. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $AX = B$.

29. Fie ε una dintre rădăcinile cubice complexe ale unității și matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $AX = B$.

30. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $XA = B$.

31. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 4\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}$. Rezolvaţi ecuaţia matriceală $XA=B$.

32. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$. Rezolvaţi ecuaţia matriceală $AXB=C$.

33. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$. Rezolvaţi ecuaţia matriceală $(A^2+A^{-1})X=B$.

34. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ şi $D=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$. Determinaţi matricele $X,\ Y\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$, ştiind că $X+Y=A$ şi $BX+CY=D$.

G. M. 7 / 1968

35. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Determinaţi matricele $X,\ Y\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$, ştiind că $AX-BY=C$ şi $BX-AY=C$.

36. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Determinaţi matricele $X,\ Y\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$, ştiind că $XY=YX$, $X+Y=5A$ şi $X^2-Y^2=10I_2$.

37. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & -3\end{pmatrix}$. Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$, ştiind că $AX^2+BX+C=O_2$ şi că $\det(X)=1$.

G. M. 3 / 1969

Răspunsuri

3. A şi B sunt inversabile, iar $A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ şi $B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ **5.** $B^{-1}=\frac{1}{2007}\begin{pmatrix}2007 & 0\\ -1003 & 1\end{pmatrix}$

6. $A^{-1}=A$ **7.** $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 4 & 7\\ 2 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

9. $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b}\\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0\\ -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}$ **10.** $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos a & \sin a & -\sin a-\cos a\\ -\sin a & \cos a & \sin a-\cos a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **11.** $a\in\boldsymbol{R}\setminus\{3\}$,

$A^{-1}=\frac{1}{7(a-3)}\begin{pmatrix}-7 & 2a-3 & a+2\\ -7 & 6-a & 3a-4\\ 7 & -3 & -5\end{pmatrix}$ **12.** $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & -5 & 1\\ -6 & 8 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$ **13.** $B^{-1}=I_3-xA$ **14.** $A^4=9I_3$ şi $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2\end{pmatrix}$ **15.** $A^{-1}=A^2$ **16.** $A^{-1}=\frac{4}{3}I_3-\frac{1}{3}A$ **17.** $B^{-1}=2I_3-B$ **19.** $(I_3+A)^{-1}=I_3-A+A^2$

20. $a\in(-4,\ 4)$ **21.** $a\in\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)\cup(2,\ \infty)$ **22.** $x\in\left\{0,\ \frac{3}{4}\right\}$ **23.** $x\in\{0,\ 2,\ 1-i,\ 1+i\}$

24. $X=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ **25.** $X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, $X^n=\begin{pmatrix}1+2n & 2n\\ -2n & 1-2n\end{pmatrix}$ **26.** $X=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ **27.** $X=\begin{pmatrix}-6 & 5\\ -13 & 10\end{pmatrix}$

28. $X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ **29.** $X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \varepsilon & 0\\ \varepsilon^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ **30.** $X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ \frac{9}{4} & -4 & \frac{1}{4}\\ 1 & -6 & 4\end{pmatrix}$ **31.** $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7 & 6 & 9\\ -3 & 6 & 1\end{pmatrix}$

32. $X=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ **33.** $X=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ **34.** $X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $Y=I_2$ **35.** $X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

36. $X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ **37.** $X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

CAPITOLUL V

SISTEME LINIARE

§ 1. Rangul unei matrice

Probleme rezolvate

1. ***Determinați numărul minorilor nenuli ai matricei*** $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Soluție: Evident, sunt patru minori nenuli de ordinul unu. Remarcăm că sunt patru minori nenuli de ordinul doi, iar aceştia sunt: $\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}$ şi $\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}$. Evidențiem şi faptul că există un singur minor de ordinul trei nenul, şi anume, $\det(A)$ (căci $\det(A)\neq 0$). Deci, numărul căutat este $4+4+1=9$.

2. ***Se consideră matricea*** $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\2&1&-2&-3\\-1&1&1&2\\-4&-2&4&6\end{pmatrix}$. ***Determinați numărul minorilor de ordinul trei ai matricei*** A***, care sunt nenuli.***

Soluție: Deoarece liniile a doua şi a patra ale matricei A au elementele proporționale, minorii de ordinul trei ai matricei A, care conțin aceste linii, sunt nuli. Rezultă că putem obține minori de ordinul trei ai matricei A, care să fie nenuli, folosind doar liniile întâi, a doua şi a treia, sau liniile întâi, a treia şi a patra. Minorii formați cu elementele liniilor întâi, a doua şi a treia sunt: $\Delta_1=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&1&-2\\-1&1&1\end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&1&-3\\-1&1&2\end{vmatrix}$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&-2&-3\\-1&1&2\end{vmatrix}$ şi $\Delta_4=\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&-2&-3\\1&1&2\end{vmatrix}$. Remarcăm şi faptul că $\Delta_1=\Delta_3=0$, iar $\Delta_2=\Delta_4=3$. Minorii formați cu elementele liniilor întâi, a treia şi a patra sunt: $\Delta_1'=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&1&1\\-4&-2&4\end{vmatrix}$, $\Delta_2'=\begin{vmatrix}1&2&0\\-1&1&2\\-4&-2&6\end{vmatrix}$, $\Delta_3'=\begin{vmatrix}1&-1&0\\-1&1&2\\-4&4&6\end{vmatrix}$ şi $\Delta_4'=\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&1&2\\-2&4&6\end{vmatrix}$. Evidențiem şi faptul că $\Delta_1'=\Delta_3'=0$, iar $\Delta_2'=\Delta_4'=6$. Drept urmare, numărul căutat este 4.

3. ***Dați un exemplu de matrice*** $A\in\mathcal{M}_{3,4}(\boldsymbol{C})$ ***care are toți minorii de ordinul trei egali cu zero.***

Soluție: Pentru a răspunde cerințelor enunțului, este suficient să considerăm o matrice de tipul (3, 4) având rangul egal cu 2. De exemplu, matricea $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

4. ***Scrieți matricea*** O_3 ***ca sumă a trei matrice având fiecare dintre ele rangul egal cu*** **2.**

Soluție: Deoarece $O_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar fiecare dintre matricele din membrul al doilea al acestei egalități are rangul egal cu 2, cerința enunțului a fost îndeplinită.

5. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$**.**

a) Aflați rangul matricei A**.**

b) ***Scrieți matricea*** A ***ca sumă a trei matrice având fiecare dintre ele același rang, și anume,*** 1**.**

Soluție: a) Întrucât $\det(A) = 0$, iar $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rezultă că $\operatorname{rang}(A) = 2$.

b) Având în vedere că $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, iar fiecare dintre matricele din membrul al doilea al egalității anterioare are rangul egal cu 1, cerința enunțului a fost îndeplinită.

6. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$**.**

a) Aflați rangul matricei A**.**

b) ***Scrieți matricea*** A ***ca o sumă de trei matrice având fiecare dintre ele rangul egal cu*** 2**.**

Soluție: a) Cum $\det(A) = -72 \neq 0$, rezultă că $\operatorname{rang}(A) = 3$.

b) Ținând seama de faptul că

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

iar fiecare dintre ultimele trei matrice are rangul egal cu 2, cerința enunțului a fost îndeplinită.

7. Determinați rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Soluție: Deoarece A este o matrice de tipul (4, 5), rezultă că $\operatorname{rang}(A) \leq 4$. Remarcând faptul că linia a patra a matricei A este o combinație liniară de primele trei linii ale matricei A, deducem că toți minorii de ordinul patru ai lui A sunt nuli, deci $\operatorname{rang}(A) \leq 3$. Ținând seama atât de cele stabilite anterior, cât și de faptul că $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$ și că acest determinant este un minor al lui A, conchidem că $\operatorname{rang}(A) = 3$.

8. Determinați, în funcție de valorile lui $m \in \boldsymbol{R}$ ***, rangul matricei*** $A = \begin{pmatrix} m+3 & 1 & 2 \\ m & m-1 & 1 \\ 3m+3 & m & m+3 \end{pmatrix}$**.**

Soluție: Se arată cu ușurință că $\det(A) = m^2(m-1)$. Dacă $m \in \boldsymbol{R} \setminus \{0, 1\}$, atunci $\det(A) \neq 0$, iar $\operatorname{rang}(A) = 3$.

Dacă $m=0$, atunci $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&-1&1\\3&0&3\end{pmatrix}$. Cum $\det(A)=0$, iar $\begin{vmatrix}3&1\\0&-1\end{vmatrix}\neq 0$, rezultă că $\operatorname{rang}(A)=2$. Dacă $m=1$, atunci $A=\begin{pmatrix}4&1&2\\1&0&1\\6&1&4\end{pmatrix}$. Având în vedere că $\det(A)=0$, iar $\begin{vmatrix}4&1\\1&0\end{vmatrix}\neq 0$, deducem că $\operatorname{rang}(A)=2$.

9. ***Determinați, în funcție de valorile lui*** $m\in\boldsymbol{R}$ ***, rangul matricei*** $A=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&4&-1&3\\-1&1&m+1&10\\1&7&1&m\end{pmatrix}$.

Soluție: Deoarece A este o matrice de tipul (4, 4), rezultă că $\operatorname{rang}(A)\le 4$. Remarcăm faptul că $\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\0&4&-1&3\\0&2&m+3&9\\0&6&-1&m+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-1&3\\2&m+3&9\\6&-1&m+1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&m+3&9\\3&-1&m+1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&-1&0\\2m+7&m+3&3m+18\\1&-1&m-2\end{vmatrix}=$

$=2\begin{vmatrix}2m+7&3m+18\\1&m-2\end{vmatrix}=4(m^2-16)$. Deducem imediat că, dacă $m\in\boldsymbol{R}\setminus\{-4,\,4\}$, atunci $\det(A)\neq 0$, deci $\operatorname{rang}(A)=4$. Fie $m=-4$. Atunci, $A=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&4&-1&3\\-1&1&-3&10\\1&7&1&-4\end{pmatrix}$. Având în vedere că $\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&4&3\\-1&1&10\end{vmatrix}=$

$=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&4&3\\0&2&9\end{vmatrix}\neq 0$ şi că acest determinant este un minor de ordinul trei al lui A, rezultă că, în cazul considerat, $\operatorname{rang}(A)=3$. Analog, arătăm că, dacă $m=4$, atunci $\operatorname{rang}(A)=3$.

10. ***Fie*** $a\in\boldsymbol{R}$ ***şi matricea*** $A=\begin{pmatrix}1&1&0&2\\3&a&1&1\\1&3&2&1\\2&2&0&1\end{pmatrix}$. ***Determinați valoarea lui*** a ***, astfel încât*** *rang (A)* ***să fie cel mai mic posibil.***

Soluție: Deoarece $A\in\mathcal{M}_4(\boldsymbol{R})$, rezultă că $\operatorname{rang}(A)\le 4$. Remarcând că determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}1&0&2\\3&2&1\\2&0&1\end{vmatrix}$ este minor al matricei A şi că $\Delta=-6\neq 0$, deducem că $\operatorname{rang}(A)\ge 3$. Deci, $\operatorname{rang}(A)$ este minim dacă şi numai dacă acesta este 3, ceea ce are loc atunci când $\det(A)=0$. Cum $\det(A)=-6(a-4)$, rezultă că $a=4$.

11. ***Fie*** $m\in\boldsymbol{R}$ ***şi matricea*** $A=\begin{pmatrix}2&m&-2&2\\4&-1&2m&5\\2&10&-12&1\end{pmatrix}$. ***Determinați, în funcție de*** m ***, rangul matricei*** A**.**

Soluție: Deoarece A este o matrice de tipul (3, 4), rezultă că $\operatorname{rang}(A)\le 3$. Evident, determinantul

$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}$ este un minor al matricei A. Întrucât acest minor este nenul, rezultă că $\text{rang}\,(A) \geq 2$. Rămâne să studiem în ce condiții $\text{rang}\,(A) = 3$. Pentru aceasta, vom cerceta minorii lui A de ordinul 3 care se obțin din minorul considerat anterior prin bordarea acestuia cu elementele corespunzătoare ale uneia dintre liniile şi ale uneia dintre coloanele rămase în afara lui. Aceştia sunt $\begin{vmatrix} 2 & m & -2 \\ 4 & -1 & 2m \\ 2 & 10 & -12 \end{vmatrix}$ şi $\begin{vmatrix} 2 & m & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix}$. Având în vedere că $\begin{vmatrix} 2 & m & -2 \\ 4 & -1 & 2m \\ 2 & 10 & -12 \end{vmatrix} = 4(m-3)(m+5)$ şi $\begin{vmatrix} 2 & m & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 6(m-3)$, deducem că, dacă $m \neq 3$, atunci $\text{rang}\,(A) = 3$, iar dacă $m = 3$, atunci $\text{rang}\,(A) = 2$.

12. ***Fie*** $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ ***şi matricele*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. ***Determinați*** a ***şi*** b, ***astfel încât*** $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(B)$.

Soluție: Evident, atât $\text{rang}\,(A) \leq 3$, cât şi $\text{rang}\,(B) \leq 3$. Întrucât toate coloanele matricei A se regăsesc în matricea B, rezultă că $\text{rang}\,(A) \leq \text{rang}\,(B)$. Din faptul că $\det(A) = 3(a-1)$ deducem că, dacă $a \neq 1$, atunci $\text{rang}\,(A) = 3$. În acest caz, $\text{rang}\,(B) = \text{rang}\,(A)$, oricare ar fi $b \in \boldsymbol{R}$. Dacă $a = 1$, atunci $\text{rang}\,(A) = 2$ (căci $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ este un minor nenul al matricei A). Se observă cu uşurință că, în cazul considerat, $\text{rang}\,(B) = \text{rang}\,(A)$ dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, ceea ce conduce la $-2b - 6 = 0$, de unde $b = -3$.

Probleme propuse

1. Scrieți matricea I_3 ca o sumă de trei matrice având fiecare dintre ele rangul egal cu 2.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Aflați rangul matricei A.

b) Scrieți matricea A ca o sumă de trei matrice având fiecare dintre ele rangul egal cu 1.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Aflați rangul matricei A.

b) Scrieți matricea A ca o sumă de trei matrice având fiecare dintre ele rangul egal cu 2.

4. Determinați rangul fiecăreia dintre matricele: $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\4&5&1\\2&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&-1&-2\\2&-1&3&-3\\4&5&-5&-1\end{pmatrix}$, .

5. Determinați rangul fiecăreia dintre matricele: $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-2\\1&4&5\\0&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\2&0&2&0&2\\0&1&0&1&0\\2&1&0&2&1\end{pmatrix}$, .

6. Determinați rangul fiecăreia dintre matricele: $A=\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\2&1&-1&3\\3&-1&0&2\\4&-3&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4&-5\\0&2&-4\\2&3&0\\0&-5&10\\3&1&7\end{pmatrix}$.

7. Determinați, în funcție de valorile lui $m\in\boldsymbol{R}$, rangul matricei $A=\begin{pmatrix}1&0&1&m\\m&1&2&-1\\m&-2&-1&m\end{pmatrix}$.

8. Determinați, în funcție de valorile lui $m\in\boldsymbol{R}$, rangul matricei $A=\begin{pmatrix}2&-1&m&2\\m&m&2&m+12\\3&-2&m&-1\end{pmatrix}$.

9. Determinați, în funcție de valorile lui $a\in\boldsymbol{R}$, rangul matricei $A=\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\4&-1&0&3\\3&a&-2&4\\5&1&2&a-1\end{pmatrix}$.

10. Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R}$. Determinați rangul matricei $A=\begin{pmatrix}1&2&1&b\\0&-1&0&2\\1&1&a&2\end{pmatrix}$.

11. Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ şi matricele $A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\3&1&a\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&-2&5\\3&1&a&1\\1&-1&1&b\end{pmatrix}$. Determinați valorile lui a şi b, astfel încât $\text{rang}\,(B)=\text{rang}\,(A)$.

Răspunsuri

4. $\text{rang}\,(A)=2,\ \text{rang}\,(B)=2$ **5.** $\text{rang}\,(A)=2,\ \text{rang}\,(B)=3$ **6.** $\text{rang}\,(A)=2,\ \text{rang}\,(B)=2$ **7.** $\text{rang}\,(A)=3$, oricare ar fi $m\in\boldsymbol{R}$ **8.** dacă $m=1$, atunci $\text{rang}\,(A)=2$, iar dacă $m\neq 1$, atunci $\text{rang}\,(A)=3$ **9.** dacă $a\in\{-3,\ 3\}$, atunci $\text{rang}\,(A)=3$, iar dacă $a\in\boldsymbol{R}\setminus\{-3,\ 3\}$, atunci $\text{rang}\,(A)=4$ **10.** dacă $a=1$ şi $b=0$, atunci $\text{rang}\,(A)=2$, iar dacă $a\neq 1$ sau $b\neq 0$, atunci $\text{rang}\,(A)=3$ **11.** dacă $a\neq 15$, atunci $\text{rang}\,(A)=\text{rang}\,(B)=3$, oricare ar fi $b\in\boldsymbol{R}$, iar dacă $a=15$ şi $b=3$, atunci $\text{rang}\,(A)=\text{rang}\,(B)=2$.

§ 2. Sisteme de ecuații liniare

Probleme rezolvate

1. ***Arătați că sistemul*** $\begin{cases} x+ay+z-t=0 \\ 2x+y+bz-t=1 \\ ax+y+z+bt=a+b \end{cases}$ ***este compatibil, oricare ar fi*** $a,\ b\in \boldsymbol{R}$.

Soluție: Deoarece (1, 0, 0, 1) este o soluție a sistemului considerat (oricare ar fi $a,\ b\in \boldsymbol{R}$), cerința enunțului a fost îndeplinită.

2. ***Folosind regula lui Cramer, rezolvați următoarele sisteme*:**

a) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-2y+z=12 \\ 4x+2y+z=5 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x+2y+z=3+3i \\ ix-y+(1+i)z=-1 \\ 2x-iy-z=i \end{cases}$.

Soluție: a) Fie Δ determinantul matricei sistemului considerat. Deoarece $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=$

$=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=9\neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat. Remarcând și faptul că:

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 12 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 11 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}=9$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 12 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}=-18$, $\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 12 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}=$

$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -21 & -38 & 12 \\ -6 & -13 & 5 \end{vmatrix}=45$, deducem că $x=1,\ y=-2$ și $z=5$. Deci, tripletul $(1,\ -2,\ 5)$ este soluția sistemului considerat.

b) Fie Δ determinantul matricei sistemului considerat. Având în vedere că

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ i & -1 & 1+i \\ 2 & -i & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & -1-2i & 1 \\ 2 & -4-i & -3 \end{vmatrix}=7(1+i),$$

deducem că sistemul este compatibil determinat. Evidențiind și faptul că:

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 3+3i & 2 & 1 \\ -1 & -1 & i+1 \\ i & -i & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3+3i & 5+3i & 4-3i \\ -1 & -2 & 1+2i \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix}=7i(1+i)$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 3+3i & 1 \\ i & -1 & i+1 \\ 2 & i & -1 \end{vmatrix}=$

$=\begin{vmatrix} 3 & 3+4i & 1 \\ 2+3i & -2+i & i+1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=14i=7(1+i)^2$, $\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3+3i \\ i & -1 & -1 \\ 2 & -i & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2+3i & -1-3i & 3+3i \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2i & i \end{vmatrix}=7(1+i)$,

conchidem că $x=i,\ y=1+i$ și $z=1$. În consecință, tripletul $(i,\ 1+i,\ 1)$ este soluția sistemului.

3. ***Folosind calea matriceală, rezolvați sistemul*** $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y+2z=1 \\ x+2y-z=-3 \end{cases}$. **(1)**

Soluție: Se consideră matricele: $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&2\\1&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Evident, sistemul (1) este echivalent cu ecuația matriceală $AX=B$. Cum $\det(A)=10\neq 0$, rezultă că matricea A este inversabilă. Remarcând că $A^*=\begin{pmatrix}-3&4&5\\4&-2&0\\5&0&-5\end{pmatrix}$, deducem că $A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-3&4&5\\4&-2&0\\5&0&-5\end{pmatrix}$. Evidențiem și faptul că $AX=B\Leftrightarrow X=A^{-1}B$. Având în vedere că $A^{-1}B=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-3&4&5\\4&-2&0\\5&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-20\\10\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$, conchidem că $x=-2,\ y=1$ și $z=3$. Deci, tripletul $(-2, 1, 3)$ este soluția sistemului (1).

4. ***Folosind regula lui Cramer, rezolvați sistemul*** $\begin{cases}x+y+z-2t=0\\2x+y+3z-4t=5\\3x-y+z+2t=10\\x+y-3z+5t=-5\end{cases}$. **(1)**

Soluție: Fie Δ determinantul sistemului (1). Întrucât

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&-2\\2&1&3&-4\\3&-1&1&2\\1&1&-3&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&0&2&0\\5&0&4&-2\\3&-1&1&2\\4&0&-2&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&2&0\\5&4&-2\\4&-2&7\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1&0\\5&4&-2\\4&-2&7\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&1&0\\-3&4&-2\\8&-2&7\end{vmatrix}=10\neq 0,$$

rezultă că sistemul (1) este compatibil determinat. Remarcând și faptul că:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}0&1&1&-2\\5&1&3&-4\\10&-1&1&2\\-5&1&-3&5\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}0&1&1&-2\\1&1&3&-4\\2&-1&1&2\\-1&1&-3&5\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&1&2&-2\\2&-1&2&0\\-1&1&-4&7\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&2&0\\-1&-4&7\end{vmatrix}=$$

$$=-5\begin{vmatrix}1&1&-2\\2&0&0\\-1&-3&7\end{vmatrix}=10,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}1&0&1&-2\\2&5&3&-4\\3&10&1&2\\1&-5&-3&5\end{vmatrix}=-20,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&0&-2\\2&1&5&-4\\3&-1&10&2\\1&1&-5&5\end{vmatrix}=30 \text{ și}$$

$$\Delta_t=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\2&1&3&5\\3&-1&1&10\\1&1&-3&-5\end{vmatrix}=10,$$ deducem că $x=1,\ y=-2,\ z=3,\ t=1$.

5. ***Folosind calea matriceală, rezolvați sistemul*** $\begin{cases}3x-2y\quad\quad-t=10\\\quad\quad 2y+2z+t=-5\\x-2y-3z-2t=9\\\quad\quad y+2z+t=-4\end{cases}$.

Soluție: Să considerăm matricele: $A=\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}10\\-5\\9\\-4\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$. Evident, sistemul considerat este echivalent cu ecuația matriceală $AX=B$. Cum $\det(A)=1\neq 0$, rezultă că matricea A este

inversabilă; fie A^{-1} inversa ei. Remarcăm şi faptul că $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$. Având în vedere că $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$ şi că $\det(A) = 1$, deducem că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$. Rezultă că $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi, deci, $x = 3,\ y = -1,\ z = -2,\ t = 1$.

6. ***Folosind metoda lui Gauss, rezolvați sistemul*** $\begin{cases} x + 2y - 4z = 13 \\ 2x + y - 3z + 4t = 10 \\ 3x + y + 2z - 2t = 1 \\ 2x + 3y - z + 2t = 10 \end{cases}$. **(1)**

Soluție: Deoarece coeficientul necunoscutei x din prima ecuație a sistemului este 1, vom elimina necunoscuta x din ecuațiile a 2-a, a 3-a şi a 4-a. Pentru aceasta, vom înmulți, pe rând, prima ecuație cu -2, cu -3 şi cu -2. Adunăm, apoi, succesiv rezultatele obținute la următoarele ecuații. Astfel, sistemul (1) conduce la

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 13 \\ -3y + 5z + 4t = -16 \\ -5y + 14z - 2t = -38 \\ y - 7z - 2t = 16 \end{cases}. \qquad (2)$$

Întrucât coeficientul necunoscutei y din cea de a patra ecuație a sistemului (2) este 1, vom elimina necunoscuta y din ecuațiile a 2-a şi a 3-a. Pentru aceasta, vom înmulți, pe rând ecuația a patra cu 3 şi cu 5. Adunăm, apoi, succesiv rezultatele obținute la ecuațiile a 2-a şi a 3-a. Astfel, sistemul (2) devine:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 13 \\ y - 7z - 2t = 16 \\ 8z + t = -16 \\ 7z + 4t = 14 \end{cases}. \qquad (3)$$

Înmulțim cea de a trei ecuație a sistemului (3) cu $-\frac{7}{8}$ şi, apoi, ecuația obținută o adunăm cu cea de a patra ecuație a sistemului. Astfel, sistemul (3) conduce la:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 13 \\ y - 7z - 2t = 16 \\ 8z + t = -16 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Deducem imediat că $t = 0,\ z = -2,\ y = 2,\ x = 1$. Prin urmare, soluția sistemului (1) este $(1,\ 2,\ -2,\ 0)$.

7. a) ***Rezolvați sistemul*** $\begin{cases} 3x + y - 3z = 22 \\ -x + 2y + 8z = 65 \\ 4x + y - 5z = 19 \end{cases}$. **(1)**

b) ***Câte dintre tripletele ce reprezintă soluțiile sistemului sunt formate cu numere naturale*****?**

Soluție: a) Fie A matricea sistemului (1). Deoarece $\det(A) = 0$, rezultă că rang $(A) \le 2$. Având în vedere

şi faptul că $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ şi că Δ este un minor al matricei A, deducem că $\text{rang}\,(A) = 2$, iar Δ este minor principal al lui A. Rezultă că x şi y sunt necunoscute principale, iar z este necunoscută secundară şi că primele două ecuaţii ale sistemului (1) sunt principale, iar ultima este ecuaţie secundară. Atunci, există un singur minor caracteristic, iar acesta este $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 22 \\ -1 & 2 & 65 \\ 4 & 1 & 19 \end{vmatrix}$. Ţinând seama şi de faptul că $\Delta_1 = 0$, conchidem că sistemul (1) este compatibil simplu nedeterminat. Notând $z = \alpha$, sistemul format din ecuaţiile principale se scrie sub forma: $\begin{cases} 3x + y = 22 + 3\alpha \\ -x + 2y = 65 - 8\alpha \end{cases}$. Rezolvând acest sistem, obţinem $x = 2\alpha - 3$, $y = 31 - 3\alpha$. Drept urmare, soluţiile sistemului (1) sunt reprezentate de tripletele $(2\alpha - 3,\ 31 - 3\alpha,\ \alpha)$ (α fiind un număr real oarecare).

b) Un triplet ce reprezintă o soluţie a sistemului (1) este format cu numere naturale dacă şi numai dacă $\alpha \in \boldsymbol{N}$, $2\alpha - 3 \geq 0$ şi $31 - 3\alpha \geq 0$, de unde $\alpha \geq \frac{3}{2}$, $\alpha \leq \frac{31}{3}$ şi $\alpha \in \boldsymbol{N}$. Rezultă că $\alpha \in [2,\ 10] \cap \boldsymbol{N}$. Prin urmare, nouă dintre tripletele ce reprezintă soluţiile sistemului (1) au toate componentele numere naturale.

8. ***Rezolvaţi sistemul*** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - 4y - 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ 4x + 2y - z = -3 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$. **(1)**

Soluţie: Fie A matricea asociată sistemului considerat. Întrucât $A \in \mathcal{M}_{5,3}(\boldsymbol{R})$, rezultă că $\text{rang}\,(A) \leq 3$. Evident, determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ este un minor al matricei A. Cum $\Delta = 28 \neq 0$, deducem că $\text{rang}\,(A) = 3$ şi că Δ este minor principal al matricei A. Rezultă că x, y, z sunt necunoscute principale şi că primele trei ecuaţii ale sistemului (1) sunt ecuaţii principale, iar ultimele două sunt ecuaţii secundare. Având în vedere faptul că există ecuaţii secundare, pentru compatibilitatea sistemului (1) trebuie să analizăm cei doi minori caracteristici. Evident, aceştia sunt: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ şi $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Deoarece $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, conchidem că sistemul (1) este compatibil determinat. Pentru aflarea soluţiei sale, trebuie să rezolvăm sistemul format din ecuaţiile principale ale sistemului (1). Întrucât $\Delta = 28$, $\Delta_x = 28$, $\Delta_y = -56$ şi $\Delta_z = 84$, soluţia acestui sistem este tripletul $(1,\ -2,\ 3)$, care este şi soluţia sistemului (1).

9. ***Rezolvaţi sistemul*** $\begin{cases} 3x + y + 3z + t = 4 \\ x - 2y + 3z - 2t = 3 \\ 2x - y + 2z - t = 1 \\ 4x + 3y - z + 3t = -3 \end{cases}$. **(1)**

Soluţie: Fie A matricea sistemului (1). Deoarece $\det(A) = 0$, rezultă că $\text{rang}\,(A) \leq 3$. Fie $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; evident, Δ este un minor al matricei A. Cum $\Delta = 10 \neq 0$, deducem că $\text{rang}\,(A) = 3$ şi

că Δ este minor principal al lui A. Rezultă că x, y, z sunt necunoscute principale, iar t este necunoscută secundară şi că primele trei ecuaţii ale sistemului (1) sunt ecuaţii principale, iar ultima este ecuaţie secundară.

În acest caz, există un singur minor caracteristic, iar acesta este $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$. Întrucât $\Delta_1 = 0$, sistemul este compatibil simplu nedeterminat (căci există o necunoscută secundară). Notând $t = \alpha$ (t este necunoscuta secundară), sistemul format din ecuaţiile principale se scrie sub forma

$$\begin{cases} 3x + y + 3z = 4 - \alpha \\ x - 2y + 3z = 3 + 2\alpha \\ 2x - y + 2z = 1 + \alpha \end{cases}. \qquad (2)$$

Deoarece $\Delta = 10$, $\Delta_x = -10$, $\Delta_y = 10(1-\alpha)$ şi $\Delta_z = 20$, rezultă că soluţia sistemului (2) este tripletul $(-1,\ 1-\alpha,\ 2)$. Drept urmare, soluţia sistemului (1) este reprezentată de $x = -1$, $y = 1-\alpha$, $z = 2$, $t = \alpha$ (α fiind un număr real oarecare).

10. ***Rezolvaţi sistemul*** $\begin{cases} 2x + y - 2z - 3t = 2 \\ 2x - y + 2z - 5t = 2 \\ 3x - y - z - t = 6 \end{cases}$**.** **(1)**

Soluţie: Fie A matricea sistemului (1). Deoarece $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\boldsymbol{R})$, rezultă că rang $(A) \le 3$. Remarcând faptul că determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ este un minor al matricei A şi că $\Delta = 12 \neq 0$, deducem că rang $(A) = 3$ şi că Δ este minor principal al lui A. Rezultă că x, y, z sunt necunoscute principale, iar t este necunoscută secundară. Totodată, remarcăm şi faptul că sistemul nu are ecuaţii secundare. Din cele stabilite anterior rezultă că sistemul (1) este compatibil simplu nedeterminat. Rămâne să determinăm soluţiile sistemului. Notând $t = \alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, sistemul (1) se scrie sub forma

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 2 + 3\alpha \\ 2x - y + 2z = 2 + 5\alpha \\ 3x - y - z = 6 + \alpha \end{cases}. \qquad (2)$$

Întrucât $\Delta = 12$, $\Delta_x = 12(2\alpha + 1)$, $\Delta_y = 12(3\alpha - 2)$ şi $\Delta_z = 12(2\alpha - 1)$, soluţiile sistemului (2) sunt tripletele $(2\alpha + 1,\ 3\alpha - 2,\ 2\alpha - 1)$, cu α arbitrar în $\boldsymbol{R}$. Drept urmare, soluţiile sistemului (1) sunt reprezentate de $x = 2\alpha + 1$, $y = 3\alpha - 2$, $z = 2\alpha - 1$, $t = \alpha$ (α arbitrar în $\boldsymbol{R}$).

11. ***Rezolvaţi sistemele*****:**

a) $\begin{cases} x + y + 2z + t = 2 \\ 2x - y + z + 2t = 1 \\ 3x - 2y + z + 3t = 1 \end{cases}$**;** **b)** $\begin{cases} x - y + 2z - 2t = -5 \\ 2x + 3y - z + t = 5 \\ 3x + y + 2z - 2t = -3 \\ 4x - y + 5z - 5t = -11 \end{cases}$.

Soluţie: a) Fie A matricea asociată sistemului considerat. Evident, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ este un minor al matricei A şi $\Delta \neq 0$. Se arată cu uşurinţă că cei doi minori de ordinul trei ai matricei A, care se obţin prin bordarea lui Δ cu elementele corespunzătoare din linia şi coloanele lui A rămase în afara lui Δ, sunt nuli. Deducem imediat că rang $(A) = 2$ şi că Δ este minor principal al lui A. Rezultă că necunoscutele x, y sunt principale, iar necunoscutele z, t sunt secundare şi că primele două ecuaţii ale sistemului sunt principale, iar ecuaţia a treia este secundară. Remarcăm şi faptul că există un singur minor caracteristic, şi anume

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. Cum $\Delta_1 = 0$, conchidem că sistemul considerat este compatibil dublu nedeterminat (căci există două necunoscute secundare). Notând $z = \alpha$ şi $t = \beta$, sistemul format din ecuaţiile principale ale sistemului considerat devine $\begin{cases} x + y = 2 - 2\alpha - \beta \\ 2x - y = 1 - \alpha - 2\beta \end{cases}$. Rezolvând acest sistem, obţinem $x = 1 - \alpha - \beta$ şi $y = 1 - \alpha$. Drept urmare, soluţia sistemului iniţial este reprezentată de $x = 1 - \alpha - \beta,\ y = 1 - \alpha,\ z = \alpha,\ t = \beta$ ($\alpha,\ \beta$ arbitrare în $\boldsymbol{R}$).

b) Fie A matricea asociată sistemului considerat. Din faptul că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, iar Δ este un minor al matricei A deducem că $\text{rang}\,(A) \geq 2$. Întrucât cei patru minori de ordinul trei ai matricei A, care se obţin prin bordarea lui Δ cu elementele corespunzătoare din liniile şi coloanele lui A rămase în afara lui Δ, sunt nuli, rezultă că $\text{rang}\,(A) = 2$. Drept urmare, Δ este minor principal al lui A, necunoscutele x, y sunt principale, iar z, t secundare şi primele două ecuaţii ale sistemului sunt principale, iar ultimele două, secundare. Remarcând şi faptul că cei doi minori caracteristici sunt nuli, conchidem că sistemul considerat este compatibil dublu nedeterminat (căci există două necunoscute secundare). Notând $z = \alpha$ şi $t = \beta$, cele două ecuaţiile principale ale sistemului considerat devin $x - y = -5 - 2\alpha + 2\beta$ şi $2x + 3y = 5 + \alpha - \beta$, de unde $x = -\alpha + \beta - 2$ şi $y = \alpha - \beta + 3$. Prin urmare, soluţiile sistemului iniţial sunt reprezentate de $x = -\alpha + \beta - 2,\ y = \alpha - \beta + 3,\ z = \alpha,\ t = \beta$ ($\alpha,\ \beta$ arbitrare în $\boldsymbol{R}$).

12. ***Determinaţi numerele naturale nenule x, y, z şi t, ştiind că ele îndeplinesc simultan condiţiile*:**

$$\begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ x + y - z - 2t = -8 \\ 5x + 5y - z - 4t = -4 \\ x + y + 3z + 4t = 28 \end{cases}. \qquad \textbf{(1)}$$

Soluţie: Se consideră egalităţile (1) ca un sistem liniar în necunoscutele x, y, z, t. Fie A matricea sistemului. Se stabileşte cu uşurinţă că $\text{rang}\,(A) = 2$ şi că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ este un minor nenul al lui A. Rezultă că Δ este minor principal al lui A, ceea ce arată că x, z sunt necunoscute principale, iar y, t sunt necunoscute secundare şi că primele două ecuaţii ale sistemului sunt principale, iar ultimele două sunt secundare. Întrucât cei doi minori caracteristici corespunzători sunt nuli, conchidem că sistemul (1) este compatibil dublu nedeterminat. Notând $y = \alpha$, $t = \beta$ şi rezolvând sistemul format din cele două ecuaţiile principale, obţinem $x = 1 - \alpha + \frac{\beta}{2}$, $z = 9 - \frac{3\beta}{2}$. Deducem imediat că soluţiile sistemului (1) sunt reprezentate de $x = 1 - \alpha + \frac{\beta}{2},\ y = \alpha,\ z = 9 - \frac{3\beta}{2},\ t = \beta$ ($\alpha,\ \beta$ arbitrare în $\boldsymbol{R}$). Pentru a încheia rezolvarea problemei, rămâne să determinăm numerele α şi β, astfel încât $x,\ y,\ z,\ t \in \boldsymbol{N}^*$. Evident, este necesar ca $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$. Cum $z > 0$, rezultă că $\beta < 6$, deci $\beta \in (0,\ 6)$. Totodată, $2 \mid \beta$ (căci $x \in \boldsymbol{N}^*$). Deducem imediat că $\beta = 2$ sau $\beta = 4$ (fiindcă $t \in \boldsymbol{N}^* \Rightarrow \beta \in \boldsymbol{N}^*$). Fie $\beta = 2$. Atunci, $x = 2 - \alpha$, ceea ce impune $\alpha < 2$ (căci $x > 0$). Rezultă că $\alpha = 1$ (fiindcă $y \in \boldsymbol{N}^* \Rightarrow \alpha \in \boldsymbol{N}^*$). Prin urmare, (1, 1, 6, 2) este o soluţie a problemei. Fie $\beta = 4$. În acest caz, $x = 3 - \alpha$, ceea ce impune $\alpha < 3$. Cum $\alpha \in (0,\ 3)$ şi $\alpha \in \boldsymbol{N}^*$, deducem că $\alpha = 1$ sau $\alpha = 2$. Dacă $\alpha = 1$, atunci (2, 1, 3, 4) este soluţie a problemei, iar dacă $\alpha = 2$, atunci (1, 2, 3, 4) este soluţie a problemei.

13. ***Rezolvați sistemele*:**

a) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x-2y+z=2 \\ 4x-2y+z=3 \\ 5x-2y+3z=7 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+3y+2z-4t=7 \\ 3x-y+5z-3t=4 \\ x-7y+z+5t=-2 \end{cases}$.

Soluție: a) Fie A matricea sistemului considerat. Întrucât $A \in \mathcal{M}_{5,3}(\boldsymbol{R})$, rezultă că $\text{rang}\,(A) \le 3$. Din faptul că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ este un minor al matricei A și, totodată, $\Delta \neq 0$, deducem că $\text{rang}\,(A) = 3$. Prin urmare, Δ este minor principal al lui A, x, y, z sunt necunoscute principale și primele trei ecuații ale sistemului sunt principale, iar ultimele două sunt secundare. Fie

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{și} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

cei doi minori caracteristici. Deoarece $\Delta_2 \neq 0$, conchidem că sistemul considerat este incompatibil (cu toate că $\Delta_1 = 0$).

b) Fie A matricea sistemului considerat. Cum $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\boldsymbol{R})$, rezultă că $\text{rang}\,(A) \le 3$. Întrucât $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ și, totodată, Δ este minor al matricei A, rezultă că $\text{rang}\,(A) \ge 2$. Se arată cu ușurință că cei doi minori de ordinul trei ai lui A, care se obțin prin bordarea lui Δ cu elementele corespunzătoare ale liniei și coloanelor rămase în afara lui Δ, sunt nuli. Deducem imediat că $\text{rang}\,(A) = 2$, că Δ este minor principal al lui A, că necunoscutele x, y sunt principale, iar z, t secundare și că primele două ecuații ale sistemului sunt principale, iar a treia este secundară. Remarcând faptul că minorul caracteristic este nenul, conchidem că sistemul considerat este incompatibil.

14. ***Fie*** a ***un parametru real. Rezolvați sistemul***

$$\begin{cases} (2a+1)x+(a+1)y+3az=a \\ (2a-1)x+(a-2)y+(2a-1)z=a+1 \\ 3ax+2ay+(4a-1)z=1 \end{cases} . \qquad \textbf{(1)}$$

Soluție: Fie Δ determinantul matricei sistemului. Se arată cu destulă ușurință că $\Delta = (a-1)^2(a+1)$. Trebuie să analizăm următoarele situații:

a) $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1,\ 1\}$. În acest caz, $\Delta \neq 0$, deci sistemul (1) este compatibil determinat. Cum $\Delta_x = a(a-1)(2a-7)$, $\Delta_y = -3a(a-1)^2$ și $\Delta_z = (a-1)(4a+1)$, conchidem că soluția sistemului (1) este tripletul $\left(\dfrac{2a^2-7a}{a^2-1},\ -\dfrac{3a}{a+1},\ \dfrac{4a+1}{a^2-1} \right)$.

b) $a = 1$. Atunci, sistemul (1) devine $\begin{cases} 3x+2y+3z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$. Fără dificultate, arătăm că acest sistem este compatibil simplu nedeterminat și că soluțiile sale sunt tripletele $(1-\alpha,\ -1,\ \alpha)$, α arbitrar în $\boldsymbol{R}$.

c) $a = -1$. În acest caz, sistemul (1) devine $\begin{cases} x+3z=1 \\ x+y+z=0 \\ 3x+2y+5z=-1 \end{cases}$. (2)

Remarcând faptul că $x+3z+2(x+y+z)=1$ (din primele două ecuații ale sistemului (2)), ceea ce contrazice ultima ecuație a sistemului (2), deducem că, pentru $a=-1$, sistemul (1) este incompatibil.

15. ***Fie*** λ ***un parametru real. Rezolvați sistemul***

$$\begin{cases} x+\lambda y+z+t=1 \\ x+y+\lambda z+t=\lambda \\ x+y+z+\lambda t=1 \end{cases}. \qquad \textbf{(1)}$$

Soluție: Fie A matricea sistemului considerat. Deoarece $A\in\mathcal{M}_{3,4}(\boldsymbol{R})$, rezultă că $\text{rang}\,(A)\le 3$. Evident, determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ este un minor al matricei A. Cum $\Delta=(\lambda-1)^2$, rezultă că, dacă $\lambda\neq 1$, atunci $\Delta\neq 0$, iar $\text{rang}\,(A)=3$, ceea ce arată că, în acest caz, Δ este minor principal. Deducem că x, y, z sunt necunoscute principale, t este necunoscută secundară şi că toate ecuațiile sistemului (1) sunt principale. Prin urmare, dacă $\lambda\neq 1$, sistemul (1) este compatibil simplu nedeterminat. Notând $t=\alpha$ $(\alpha\in\boldsymbol{R})$, sistemul (1) conduce la

$$\begin{cases} x+\lambda y+z=1-\alpha \\ x+y+\lambda z=\lambda-\alpha \\ x+y+z=1-\lambda\alpha \end{cases}. \qquad (2)$$

Întrucât determinantul acestui sistem este Δ, iar $\Delta=(\lambda-1)^2\neq 0$ (căci $\lambda\neq 1$), pentru rezolvarea lui putem aplica regula lui Cramer. Având în vedere că $\Delta_x=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)\alpha$, $\Delta_y=(\lambda-1)^2\alpha$ şi $\Delta_z=(\alpha+1)(\lambda-1)^2$, deducem că $x=-\alpha(\lambda+2)$, $y=\alpha$, $z=\alpha+1$. Deci, soluțiile sistemului (1) sunt date de $x=-\alpha(\lambda+2)$, $y=\alpha$, $z=\alpha+1$, $t=\alpha$ (α oarecare în $\boldsymbol{R}$).

Dacă $\lambda=1$, atunci sistemul (1) se reduce la ecuația $x+y+z+t=1$. Drept urmare, în acest caz, soluțiile sistemului (1) sunt reprezentate de $x=1-\alpha-\beta-\gamma$, $y=\alpha$, $z=\beta$, $t=\gamma$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\boldsymbol{R})$.

16. ***Fie*** λ ***un parametru real. Rezolvați sistemul***

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y-3z=-3 \\ x+2\lambda y-2z=2\lambda-2 \\ 3x+\lambda(\lambda+1)y-4z=\lambda-1 \end{cases}. \qquad \textbf{(1)}$$

Soluție: Fie A matricea sistemului (1). Remarcăm, mai întâi, că determinantul $d=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ este minor al matricei A şi că $d\neq 0$. Pentru a stabili rangul matricei A, trebuie să analizăm minorii de ordinul trei ai lui A care se obțin prin bordarea lui d cu elementele corespunzătoare din liniile şi coloanele lui A care au rămas în afara lui d. Evident, aceştia sunt $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2\lambda & -2 \end{vmatrix}$ şi $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & \lambda(\lambda+1) & -4 \end{vmatrix}$. Se arată cu uşurință că $\Delta_1=2(\lambda+1)$, iar $\Delta_2=\lambda(\lambda+1)$. Fie $\lambda\neq -1$. Atunci $\Delta_1\neq 0$, ceea ce arată că, în acest caz, $\text{rang}\,(A)=3$. Deducem că Δ_1 este minor principal al sistemului (1) şi că necunoscutele x, y, z sunt principale, iar primele trei ecuații ale sistemului sunt principale şi a patra, secundară. Întrucât există o ecuație secundară, pentru stabilirea compatibilității sistemului, trebuie să analizăm minorul caracteristic corespunzător. Evident, acesta este determinantul $\Delta'=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2\lambda & -2 & 2\lambda-2 \\ 3 & \lambda(\lambda+1) & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix}$. Cum $\Delta'=2(1-\lambda)(\lambda+1)^2$, rezultă că $\Delta'=0$ dacă şi numai dacă $\lambda=1$ (căci $\lambda\neq -1$). Dacă $\lambda\neq 1$, atunci sistemul (1) este incompatibil. Dacă $\lambda=1$, atunci sistemul este compatibil determinat. Pentru aflarea soluției sistemului (1), trebuie să rezolvăm sistemul

format din ecuațiile principale, şi anume: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y-3z=-3 \\ x+2y-2z=0 \end{cases}$. Cum $\Delta=4,\ \Delta_x=8,\ \Delta_y=4$ şi $\Delta_z=8$, rezultă că $x=2,\ y=1,\ z=2$. Deci, în cazul considerat, soluția sistemului (1) este tripletul $(2,\ 1,\ 2)$. Fie $\lambda=-1$. Atunci, $\Delta_1=0$ şi $\Delta_2=0$, ceea ce arată că, în acest caz, $\text{rang}\,(A)=2$. Remarcăm şi faptul că $d=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ este minor principal. Prin urmare, $x,\ y$ sunt necunoscute principale şi z este necunoscută secundară, iar primele două ecuații sunt principale şi ultimele două sunt secundare. Se verifică imediat că cei doi minori caracteristici sunt nuli. Deci, sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Soluțiile sistemului sunt tripletele $\left(\frac{4\alpha-2}{3},\ \frac{5-\alpha}{3},\ \alpha\right)$, iar α arbitrar în $\boldsymbol{R}$.

17. ***Determinați parametri reali*** $a,\ b,\ c$ ***şi*** d***, astfel încât sistemul***

$$\begin{cases} 3x-y+7z=2 \\ -x+2y+z=4 \\ ax+9y-3z=c \\ 2x+by+4z=d \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

să fie compatibil simplu nedeterminat.

Soluție: Evident, sistemul (1) este compatibil simplu nedeterminat dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este doi, iar cei doi minori caracteristici care apar în rezolvarea sistemului sunt nuli. Fie A matricea sistemului (1). Întrucât determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ este minor al matricei A şi, totodată, $\Delta\neq 0$, rezultă că $\text{rang}\,(A)=2$ dacă şi numai dacă cei doi minori de ordinul trei ai matricei A obținuți prin bordarea lui Δ cu elementele corespunzătoare ale coloanei şi liniilor lui A rămase în afara lui Δ sunt nuli; fie Δ' şi Δ'' aceşti minori. Deoarece $\Delta'=-15(a+7)$ şi $\Delta''=-10(b+1)$, cerința anterioară este îndeplinită dacă şi numai dacă $a=-7$ şi $b=-1$. În acest caz, Δ este minor principal al matricei A, $x,\ y$ sunt necunoscute principale, iar z este necunoscută secundară şi primele două ecuații ale sistemului (1) sunt principale, iar celelalte două sunt secundare. Deducem imediat că cei doi minori caracteristici sunt $\Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -7 & 9 & c \end{vmatrix}$ şi $\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & d \end{vmatrix}$. Cum $\Delta_1=5(c-14)$ şi $\Delta_2=5d-2$, conchidem că $\Delta_1=\Delta_2=0$ atunci şi numai atunci când $c=14$ şi $d=\frac{2}{5}$. Prin urmare, soluția problemei este dată de $a=-7,\ b=-1,\ c=14$ şi $d=\frac{2}{5}$.

18. ***Determinați parametri*** $a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$***, astfel încât sistemul***

$$\begin{cases} 2x-y+z+2t=1 \\ x+y+az+t=2 \\ 3x-2y+z+bt=c \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

să fie compatibil dublu nedeterminat. În acest caz, rezolvați sistemul.

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că sistemul (1) este compatibil dublu nedeterminat dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este doi, iar minorul caracteristic corespunzător este nul. Fie A matricea sistemului (1). Deoarece determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ este minor al matricei A şi, totodată, $\Delta\neq 0$, rezultă că $\text{rang}\,(A)=2$ dacă şi numai dacă cei doi minori de ordinul trei ai matricei A obținuți prin bordarea lui Δ cu elementele corespunzătoare ale liniei şi coloanelor lui A rămase în afara lui Δ sunt nuli; fie Δ' şi Δ'' aceşti minori. Având în vedere că $\Delta'=a-2$ şi $\Delta''=3(b-3)$, ei sunt nuli dacă şi numai dacă $a=2$ şi $b=3$. Atunci, Δ este minor principal al matricei A, $x,\ y$ sunt necunoscute principale, iar $z,\ t$ sunt necunoscute secundare şi primele două ecuații sunt principale, iar a treia este secundară. Deducem imediat că minorul caracteristic este

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & c \end{vmatrix}$. Cum $\Delta_1 = 3(c-1)$, rezultă că $\Delta_1 = 0$ atunci când $c = 1$. Cu *a, b, c* astfel determinați, notând $z = \alpha$ şi $t = \beta$, ecuațiile principale devin $2x - y = 1 - \alpha - 2\beta$ şi $x + y = 2 - 2\alpha - \beta$, de unde $x = 1 - \alpha - \beta$, $y = 1 - \alpha$. Drept urmare, soluțiile sistemului inițial sunt reprezentate de $x = 1 - \alpha - \beta$, $y = 1 - \alpha$, $z = \alpha$, $t = \beta$, cu α, β arbitrari în $\boldsymbol{R}$.

19. ***Fie*** *a, b* ***doi parametri reali. Rezolvați sistemul***

$$\begin{cases} x - ay - z = 8 \\ 2x - y - 2z = -4 \\ bx + 2y + z = 4 \end{cases}. \qquad \textbf{(1)}$$

Soluție: Fie Δ determinantul matricei sistemului (1). Deoarece $\Delta = (2a-1)(b+1)$, se impune să analizăm următoarele situații:

I. $a \neq \frac{1}{2}$ şi $b \neq -1$. În acest caz, $\Delta \neq 0$, deci sistemul (1) este compatibil determinat. Întrucât $\Delta_x = 4(a+7)$, $\Delta_y = -20(b+1)$ şi $\Delta_z = 4(ab + 2a + 2b + 9)$, rezultă că soluția sistemului este tripletul $\left(\frac{4(a+7)}{(2a-1)(b+1)}, -\frac{20}{2a-1}, \frac{4(ab+2a+2b+9)}{(2a-1)(b+1)} \right)$.

II. $a = \frac{1}{2}$. Atunci, prima ecuație a sistemului (1) devine $2x - y - 2z = 16$. Ținând seama atât de acest rezultat, cât şi de cea de a doua ecuație a sistemului (1), deducem că, în acest caz, sistemul (1) este incompatibil.

III. $b = -1$. Atunci, sistemul (1) devine $\begin{cases} x - ay - z = 8 \\ 2x - y - 2z = -4 \\ -x + 2y + z = 4 \end{cases}$. (2)

Evident, determinantul matricei sistemului (2) este nul. Întrucât determinantul $\Delta' = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, rezultă că rangul matricei sistemului (2) este 2. Totodată, Δ' este minor principal al respectivei matrice, ceea ce arată că *x, y* sunt necunoscute principale, iar *z* este necunoscută secundară şi că ultimele două ecuații sunt principale, iar prima este secundară. Fie Δ_1 minorul caracteristic. Se stabileşte cu uşurință că $\Delta_1 = 4(a+7)$. Drept urmare:

a) dacă $a \neq -7$, atunci sistemul (2) este incompatibil;

b) dacă $a = -7$, atunci sistemul (2) este compatibil simplu nedeterminat. În acest caz, soluția sistemului se obține rezolvând sistemul format din ecuațiile principale. Deducem imediat că soluția sistemului este tripletul $\left(\frac{3\alpha - 4}{3}, \frac{4}{3}, \alpha \right)$, iar α este arbitrar în $\boldsymbol{R}$.

20. ***Fie*** *a, b, c* ***trei parametri reali şi sistemul***

$$\begin{cases} x + y - z = -3 \\ 2x - y - 3z = b \\ -x + ay - 2z = 0 \\ -3x + 4z = c \end{cases}. \qquad \textbf{(1)}$$

a) ***Determinați*** *a, b, c****, astfel încât sistemul (1) să fie:*** **i)** ***compatibil determinat;*** **ii)** ***compatibil nedeterminat;*** **iii)** ***incompatibil.***

b) ***Rezolvați sistemul (1) în cazul în care*** $a = -10$, $b = -7$ ***şi*** $c = 10$.

Soluție: a) Fie *A* matricea sistemului (1). Deoarece determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, rezultă că rang $(A) \geq 2$.

Rămâne să analizăm minorii de ordinul trei ai matricei A care se obţin din minorul anterior prin bordarea lui cu elementele corespunzătoare ale uneia dintre liniile şi ale coloanei lui A rămase în afara lui Δ. Evident, aceştia sunt $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & a & -2 \end{vmatrix}$ şi $\Delta'' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. Întrucât $\Delta' = a + 10$, iar $\Delta'' = 0$, rezultă că, dacă $a = -10$, atunci $\text{rang}(A) = 2$, iar dacă $a \neq -10$, atunci $\text{rang}(A) = 3$.

I. Fie $a \neq -10$. Atunci, Δ' este minorul principal al matricei A. Rezultă că x, y, z sunt necunoscute principale şi că primele trei ecuaţii ale sistemului sunt principale, iar a patra este secundară. Evident, minorul caracteristic este $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & b \\ -1 & a & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & c \end{vmatrix}$. Deoarece $\Delta_1 = (a+10)(b+c-3)$, iar $a + 10 \neq 0$, rezultă că $\Delta_1 = 0$ dacă şi numai dacă $b + c = 3$. Prin urmare, dacă $a \neq -10$ şi $b + c \neq 3$, sistemul (1) este incompatibil, iar dacă, $a \neq -10$ şi $b + c = 3$, sistemul (1) este compatibil determinat.

II. Fie $a = -10$. Atunci, Δ este minor principal al matricei A. Rezultă că x, y sunt necunoscute principale, iar z este necunoscută secundară şi că primele două ecuaţii ale sistemului sunt principale, iar ultimele două sunt secundare. În acest caz, există doi minori caracteristici, iar aceştia sunt $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & b \\ -1 & -10 & 0 \end{vmatrix}$ şi $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & b \\ -3 & 0 & c \end{vmatrix}$. Cum $\Delta_2 = 9b + 63$, iar $\Delta_3 = -3(b + c - 3)$, conchidem că:

- dacă $a = -10$, $b = -7$ şi $c = 10$, atunci sistemul (1) este compatibil simplu nedeterminat;
- dacă $a = -10$, $b \neq -7$ sau $a = -10$, $b + c \neq 3$, atunci sistemul este incompatibil.

Astfel, s-au obţinut răspunsurile la toate cerinţele de la a).

b) În cazul considerat, sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Notând $z = \alpha$, ecuaţiile principale ale respectivului sistem conduc la $x + y = \alpha - 3$ şi $2x - y = 3\alpha - 7$, de unde $x = \frac{4\alpha - 10}{3}$ şi $y = \frac{1 - \alpha}{3}$. Deducem imediat că soluţiile sistemului sunt reprezentate de: $x = \frac{4\alpha - 10}{3}$, $y = \frac{1 - \alpha}{3}$, $z = \alpha$ şi α arbitrar în $\boldsymbol{R}$.

21. ***Rezolvaţi sistemele*:**

a) $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y + 3z + 2t = 0 \\ 3x + 6y - z + 2t = 0 \\ 2x - y + 4z + 2t = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x - 3y + z - 4t = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 3t = 0 \\ 3x - 2y + z - 5t = 0 \end{cases}$.

Soluţie: a) Fie A matricea sistemului considerat. Întrucât $\det(A) = 0$, rezultă că sistemul admite şi soluţii nenule. Fie $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$. Având în vedere că Δ este un minor al matricei A şi că $\Delta = -6 \neq 0$, deducem că $\text{rang}(A) = 3$ şi, totodată, că Δ este minor principal al matricei A. Rezultă că x, y, z sunt necunoscute principale, iar t este necunoscută secundară şi că primele trei ecuaţii ale sistemului sunt principale. Notând $t = \alpha$, sistemul format din ecuaţiile principale devine: $\begin{cases} x + y + z = -\alpha \\ x + y + 3z = -2\alpha \\ 3x + 6y - z = -2\alpha \end{cases}$. (1)

Cum Δ este determinantul sistemului (1), iar $\Delta_x = \alpha$, $\Delta_y = 2\alpha$ şi $\Delta_z = 3\alpha$, rezultă că tripletele

$\left(-\frac{\alpha}{6},\ -\frac{\alpha}{3},\ -\frac{\alpha}{2}\right)$ $(\alpha \in \boldsymbol{R})$ sunt soluțiile sistemului (1). Prin urmare, soluțiile sistemului inițiat sunt reprezentate de $x=-\frac{\alpha}{6},\ y=-\frac{\alpha}{3},\ z=-\frac{\alpha}{2},\ t=\alpha$ (α arbitrar în $\boldsymbol{R}$).

b) Deoarece sistemul considerat este omogen, iar numărul ecuațiilor este mai mic decât numărul necunoscutelor, sistemul admite și soluții nenule. Fie A matricea sistemului considerat. Întrucât $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=10\neq 0$ și, totodată, Δ este minor al matricei A, rezultă că $\operatorname{rang}(A)=3$ și, că Δ este minor principal al matricei A. Drept urmare, necunoscutele $x,\ y,\ z$ sunt principale, iar t este necunoscută secundară și că toate ecuații sistemului sunt principale. Notând $t=\alpha$ ($\alpha \in \boldsymbol{R}$), sistemul inițial se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} x-3y+z=4\alpha \\ 2x+3y-2z=-3\alpha \\ 3x-2y+z=5\alpha \end{cases}. \qquad (1)$$

Având în vedere că Δ este determinantul sistemului (1), și că $\Delta_x=8\alpha,\ \Delta_y=-6\alpha$ și $\Delta_z=14\alpha$, conchidem că tripletele $\left(\frac{4\alpha}{5},\ -\frac{3\alpha}{5},\ \frac{7\alpha}{5}\right)$ (α arbitrar în $\boldsymbol{R}$) sunt soluțiile sistemului (1). Deducem imediat că soluțiile sistemului inițial sunt reprezentate de $x=\frac{4\alpha}{5},\ y=-\frac{3\alpha}{5},\ z=\frac{7\alpha}{5},\ t=\alpha$ (α arbitrar în $\boldsymbol{R}$).

22. ***Fie*** $a,\ b,\ c\in \boldsymbol{R}$ ***și funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=ae^x+be^{-x}+c$**.** ***Arătați că, dacă*** $f(x)=0$ ***oricare ar fi*** $x\in\boldsymbol{R}$**,** ***atunci*** $a=b=c=0$**.**

Soluție: Deoarece $f(x)=0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, rezultă că $f(-1)=0,\ f(0)=0$ și $f(1)=0$. Ținând seama că $f(-1)=ae^{-1}+be+c,\ f(0)=a+b+c$ și $f(1)=ae+be^{-1}+c$, deducem că $ae^{-1}+be+c=0,\ a+b+c=0,\ ae+be^{-1}+c=0$. Să considerăm ultimele trei egalități ca un sistem în necunoscute $a,\ b,\ c$ (evident, acest sistem este liniar și omogen). Fie Δ determinantul matricei sistemului. Întrucât $\Delta=\begin{vmatrix} e^{-1} & e & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ e & e^{-1} & 1 \end{vmatrix}=e(e-2)+\frac{2e-1}{e^2}\neq 0$ (căci $e>2$), rezultă că sistemul considerat admite numai soluția nulă. Deci, $a=b=c=0$.

23. ***Fie*** $a,\ b,\ c,\ m,\ n,\ p\in\boldsymbol{R}$ ***și funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=m(x-a)^3+n(x-b)^3+p(x-c)^3$**.** ***Arătați că, dacă*** $a,\ b,\ c$ ***sunt nenule și diferite între ele, iar*** $x=0$ ***este rădăcină triplă a ecuației*** $f(x)=0$**,** ***atunci*** $f(x)=0$**,** ***oricare ar fi*** $x\in\boldsymbol{R}$**.**

Soluție: Deoarece $x=0$ este rădăcină triplă a ecuației $f(x)=0$, rezultă că $f(0)=0,\ f'(0)=0$ și $f''(0)=0$. Remarcăm și faptul că $f'(x)=3m(x-a)^2+3n(x-b)^2+3p(x-c)^2$, iar $f''(x)=6m(x-a)+6n(x-b)+6p(x-c)$. Astfel, condițiile $f(0)=0,\ f'(0)=0$ și $f''(0)=0$, conduc la $a^3m+b^3n+c^3p=0,\ a^2m+b^2n+c^2p=0$, respectiv $am+bn+cp=0$. Să considerăm ultimele trei egalități ca un sistem (liniar omogen) în necunoscutele $m,\ n,\ p$. Fie Δ determinantul matricei sistemului. Evidențiind faptul că $\Delta=\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-abc(b-a)(c-a)(c-b)$, iar $a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}^*$ și $a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a$, deducem că $\Delta\neq 0$. Deci, sistemul considerat admite numai soluția nulă și, deci, $a=b=c=0$, ceea ce arată că $f(x)=0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

24. ***Fie*** a ***un parametru real. Rezolvaţi sistemul***

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+az+t=0 \\ x+(a+1)y+z+t=0 \\ (a-1)x+2y+2z+t=0 \end{cases} . \qquad (1)$$

Soluţie: Fie Δ determinantul sistemului (1). Se arată cu uşurinţă că $\Delta = a(a-1)(a-2)$. Deducem că, dacă $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0,\ 1,\ 2\}$, atunci sistemul (1) admite numai soluţia nulă, iar dacă $a=0$ sau $a=1$ sau $a=2$, atunci sistemul (1) admite şi soluţii diferite de soluţia nulă. Fie $a=0$. În acest caz, sistemul (1) devine $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+t=0 \\ -x+2y+2z+t=0 \end{cases}$. Fără nici o dificultate, arătăm că soluţiile acestui sistem sunt reprezentate de: $x=-\frac{\alpha}{3},\ y=-\frac{2\alpha}{3},\ z=0,\ t=\alpha$ (α arbitrar în $\boldsymbol{R}$). Fie $a=1$. Atunci, sistemul (1) conduce la $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+z+t=0 \\ 2y+2z+t=0 \end{cases}$. Se arată cu uşurinţă că, în cazul considerat, soluţiile sistemului sunt date de: $x=-\frac{\alpha}{2},$ $y=0,\ z=-\frac{\alpha}{2},\ t=\alpha$ (α arbitrar în $\boldsymbol{R}$). Analog, arătăm că, dacă $a=2$, atunci soluţiile sistemului sunt: $x=-\alpha,\ y=z=0,\ t=\alpha$ (α arbitrar în $\boldsymbol{R}$).

25. ***Fie*** a ***un parametru real şi sistemul***

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ x+ay-2z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x^2+2y^2+3z^2=96 \end{cases} . \qquad (1)$$

Determinaţi valoarea lui a ***pentru care sistemul are cel puţin o soluţie ale cărei componente sunt numere reale. În acest caz, rezolvaţi sistemul.***

Soluţie: Ţinând seama de ecuaţia a patra a sistemului (1), cerinţa ca acesta să aibă cel puţin o soluţie ale cărei componente să fie numere reale ar putea fi îndeplinită numai dacă sistemul format din primele trei ecuaţii ale sistemului (1) admite şi soluţii diferite de soluţia nulă. Cum acest sistem este omogen, iar numărul necunoscutelor este egal cu numărul ecuaţiilor, cerinţa anterioară este îndeplinită dacă şi numai dacă determinantul sistemului este nul, ceea ce conduce la $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & a & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, de unde $a=-3$. În acest caz, rezolvând sistemul omogen, deducem că soluţiile lui sunt tripletele $(-\alpha,\ -\alpha,\ \alpha)$ cu α arbitrar în $\boldsymbol{R}$. Evident, acest triplet este soluţie a sistemului (1) dacă şi numai dacă el verifică cea de a patra ecuaţie a sistemului, ceea ce impune $\alpha^2+2\alpha^2+3\alpha^2=96$, de unde $\alpha=-4$ sau $\alpha=4$. Drept urmare, sistemul (1) îndeplineşte cerinţa din enunţ dacă şi numai dacă $a=-3$, iar soluţiile sale sunt $(4,\ 4,\ -4)$ şi $(-4,\ -4,\ 4)$.

26. ***Fie*** $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$***. Determinaţi rangul matricei*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ a & b & c & c & c \end{pmatrix}$.

Soluţie: Deoarece $A \in \mathcal{M}_{3,5}(\boldsymbol{R})$, rezultă că $\operatorname{rang}(A) \le 3$. Remarcând faptul că determinantul $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ şi că d este un minor al matricei A, deducem că $\operatorname{rang}(A) \ge 2$. Fie $d_1,\ d_2,\ d_3$ minorii de

ordinul trei al matricei A obținuți prin bordarea minorului d cu elementele corespunzătoare ale liniei şi ale uneia dintre coloanele lui A rămase în afara lui d. Se stabileşte cu uşurință că $d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -a-b+c$, $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -5a+2b+c$, $d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 5a-3b+c$. Să cercetăm în ce condiții minorii d_1, d_2, d_3 sunt simultan nuli. Să considerăm sistemul (în necunoscutele a, b, c): $\begin{cases} a+b-c=0 \\ 5a-2b-c=0 \\ 5a-3b+c=0 \end{cases}$. (1)

Deducem imediat că determinantul acestui sistem este nenul. Ținând seama şi de faptul că (1) este un sistem omogen în care numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor, conchidem că sistemul admite numai soluția nulă, ceea ce arată că $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ dacă şi numai dacă $a = b = c = 0$. În consecință, dacă $a = b = c = 0$, atunci $\text{rang}(A) = 2$, iar dacă cel puțin unul dintre numerele a, b, c este nenul, atunci $\text{rang}(A) = 3$.

Probleme propuse

1. Rezolvați, folosind regula lui Cramer, sistemele:

a) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y+2z=1 \\ x+2y-z=-3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+2y+3z=5+3i \\ 2x+iy+z=3i \\ ix-y+(1+i)z=-1 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-6y+3z=-1 \\ 4x-y+2z=2 \end{cases}$.

2. Rezolvați, folosind regula lui Cramer, sistemele:

a) $\begin{cases} 2x-3y+z=4 \\ x-2y-2z=-6 \\ 3x-4y+z=5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+2y+3z-t=6 \\ 3x-y-z+2t=3 \\ -2x+3y+z-3t=0 \\ 2x+3y+z-t=6 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x+2y-z+3t=1 \\ 2x+y-2z+4t=1 \\ -3x+2y+3z-t=-3 \\ y+z+2t=-1 \end{cases}$.

3. Rezolvați, folosind metoda lui Gauss, sistemele:

a) $\begin{cases} x+2y-3z=-4 \\ 2x+5y-4z=0 \\ 3x-3y+4z=9 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y+3z+t=5 \\ x+2y+2z+3t=0 \\ x+y+4z-2t=10 \\ x+y+3z+2t=4 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x+2y+3z+2t=-1 \\ 2x+5y+2z+t=3 \\ 3x+2y+z+2t=1 \\ 4x+3y+2z+t=-5 \end{cases}$.

4. Rezolvați, folosind calea matriceală, sistemele:

a) $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y+z=2 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x-2y+z=-7 \\ 2x+3y-z=4 \end{cases}$.

5. Rezolvați, folosind, pe rând, regula lui Cramer, calea matriceală şi metoda lui Gauss, sistemul

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y+z=-2 \\ 3x-2y-z=1 \end{cases}.$$

6. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} 2x-3y+z=-5 \\ 3x-2y-z=-5 \\ x+6y-7z=5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+2y-5z=1 \\ x+3y-7z=1 \\ 3x-y-z=3 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-7z=2 \\ -x+2y+8z=-1 \end{cases}$.

7. Rezolvați în $N \times N \times N$ sistemul $\begin{cases} x+2y+3z=11 \\ 2x+5y+z=13 \\ 4x+11y-3z=17 \end{cases}$.

8. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} x+y-3z+t=3 \\ 3x+3y-3z+t=3 \\ 2x+2y+3z-t=-3 \\ 3x+2y-2z-t=2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+2y-z+t=1 \\ 2x-2y+z-t=1 \\ 4x-10y+5z-5t=1 \\ -2x+14y-7z+7t=1 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x-y+2z-2t=-5 \\ 2x+3y-z+t=5 \\ 3x+y+2z-2t=-3 \\ 4x-y+5z-5t=1 \end{cases}$.

9. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} x+3y-2z-2t=0 \\ x+2y+z-t=2 \\ 2x+y-z-2t=7 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y+z-t=-3 \\ 2x+3y+7z-2t=-10 \\ 3x+2y-2z-3t=-5 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 2x+y+z+4t=1 \\ x-y+2z+5t=2 \\ x+2y-z-t=3 \end{cases}$.

10. Rezolvați sistemul $\begin{cases} x+2y+3z+4t=1 \\ 2x+3y+4z+5t=2 \\ 3x+4y+5z+6t=3 \end{cases}$.

11. Fie m un parametru real. Rezolvați sistemul $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+2y+z=1 \\ 2mx+y+(m+1)z=0 \end{cases}$.

12. Fie m un parametru real. Rezolvați sistemul $\begin{cases} x+my+2z=1 \\ x+(2m-1)y+3z=1 \\ x+my+(m-3)z=2m-1 \end{cases}$.

13. Fie a un parametru real. Rezolvați sistemul $\begin{cases} (2a+1)x-ay+(a+1)z=a-1 \\ (a-2)x+(a-1)y+(a-2)z=a \\ (2a-1)x+(a-1)y+(2a-1)z=a \end{cases}$.

14. Determinați parametrii reali a și b, astfel încât sistemul $\begin{cases} ax+2y-3z=1 \\ 2x-5y+4z=1 \\ 4x-y+2z=b \end{cases}$ să fie compatibil simplu nedeterminat.

15. Determinați parametrii reali a, b, c și d, astfel încât sistemul $\begin{cases} x-3y-2z=1 \\ 3x+2y+z=2 \\ 4x+ay-z=c \\ x+8y+bz=d \end{cases}$ să fie compatibil simplu nedeterminat. În acest caz, rezolvați sistemul.

16. Determinați parametrii reali a, b și c, astfel încât sistemul $\begin{cases} 2x-y+z-t=1 \\ x+y+az+t=-1 \\ x-y+z+bt=c \end{cases}$ să fie compatibil dublu nedeterminat.

17. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+3y-2z=0 \\ 2x+6y-3z=0 \\ 2x+9y-4z=0 \end{cases}$.

a) Rezolvați sistemul.

b) Fie $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ o soluție a sistemului cu $x_1 \neq 0$. Calculați $\dfrac{x_1+3z_1}{x_1+2y_1}$.

c) Determinați soluția $(x_2,\ y_2,\ z_3)$ a sistemului considerat știind că $x_2+2y_2+3z_2=25$.

18. Rezolvați sistemul $\begin{cases} 2x+y-4z+5t=0 \\ 3x+2y-7z+9t=0 \\ x-y+z-2t=0 \\ 4x+5y-14z+19t=0 \end{cases}$.

19. Se consideră parametrul real a și sistemul $\begin{cases} 3x+y+5z=0 \\ 5x-2y+az=0 \\ ax-3y-5z=0 \end{cases}$.

a) Determinați valorile lui a pentru care sistemul considerat admite și soluții diferite de soluția nulă.

b) Rezolvați sistemul în cazul în care $a=1$.

20. Fie a un parametru real. Rezolvați sistemul $\begin{cases} x+y+az-t=0 \\ 2x+y-z+t=0 \\ 3x-y-z-t=0 \\ ax-2y-2t=0 \end{cases}$.

21. Fie a un parametru real. Rezolvați sistemul $\begin{cases} 2x+5y+z-2t=0 \\ ax-6y-4z+2t=0 \\ 3x+y-3z+4t=0 \\ 2x-ay-2z=0 \end{cases}$.

22. Se consideră parametrul real a și sistemul $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-2y+z+(a-1)t=0 \\ 2x-y+3z+(a-3)t=0 \\ 2x+(a-1)y+2z+at=0 \end{cases}$.

a) Determinați valorile lui a pentru care sistemul admite și soluții diferite de soluția nulă.

b) Rezolvați sistemul în cazul în care $a=1$ și, apoi, în cazul în care $a=2$.

Răspunsuri

1. a) $(-2,\ 1,\ 3)$; **b)** $(i,\ 1+i,\ 1)$; **c)** $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)$ **2. a)** $(2,\ 1,\ 3)$; **b)** $(2,\ 0,\ 1,\ -1)$; **c)** $(2,\ 1,\ 0,\ -1)$ **3. a)** $(1,\ 2,\ 3)$; **b)** $(1,\ -1,\ 2,\ -1)$; **c)** $(-2,\ 2,\ -3,\ 3)$ **4. a)** $(1,\ 1,\ -1)$; **b)** $(-2,\ 3,\ 1)$ **5.** $(1,\ 2,\ -2)$ **6. a)** $(\alpha-1,\ \alpha+1,\ \alpha)$; **b)** $(\alpha+1,\ 2\alpha,\ \alpha)$; **c)** $(2\alpha+1,\ -3\alpha,\ \alpha)$ **7.** $(3,\ 1,\ 2)$ **8. a)** $\left(\frac{5\alpha}{3},\ -\frac{5\alpha}{3},\ \frac{\alpha-3}{3},\ \alpha\right)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$; **b)** $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1+3\alpha-3\beta}{6},\ \alpha,\ \beta\right)$, $\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{R}$; **c)** incompatibil **9. a)** $\left(5-3\alpha,\ -1-\alpha,\ \alpha,\ 1-4\alpha\right)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$; **b)** $\left(1+4\alpha+\beta,\ -5\alpha-4,\ \alpha,\ \beta\right)$, $\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{R}$; **c)** incompatibil **10.** $\left(1+\alpha+2\beta,\ -2\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta\right)$, $\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{R}$ **11.** Dacă $m\in\boldsymbol{R}\setminus\{0,\ 1\}$, atunci sistemul este compatibil determinat, iar soluția sa este $\left(-\frac{1}{2(m-1)},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2(m-1)}\right)$; dacă $m=1$, atunci sistemul este incompatibil; dacă $m=0$, atunci sistemul este compatibil simplu nedeterminat, iar soluțiile sale sunt $(1-\alpha,\ \alpha,\ -\alpha)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$. **12.** Dacă $m\in\boldsymbol{R}\setminus\{1,\ 5\}$, atunci sistemul este compatibil determinat, iar soluția sa este $\left(\frac{-m-1}{m-5},\ \frac{-2}{m-5},\ \frac{2m-2}{m-5}\right)$; dacă $m=1$, atunci sistemul este compatibil simplu nedeterminat, iar soluțiile sale sunt $(1-\alpha,\ \alpha,\ 0)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$; dacă $m=5$, atunci sistemul este incompatibil. **13.** Dacă $a\in\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 0,\ 1\}$, atunci sistemul este compatibil determinat, iar soluția sa este $\left(\frac{2a^2-2a+1}{a(a-1)},\ \frac{a}{a-1},\ -\frac{2a^2-2a+1}{a(a-1)}\right)$; dacă $a=-1$, atunci sistemul este compatibil simplu nedeterminat, iar soluțiile sale sunt $\left(1-\frac{3\alpha}{5},\ -1-\frac{3\alpha}{5},\ \alpha\right)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$; dacă $a=0$ sau $a=1$, atunci sistemul este incompatibil. **14.** $a=-5,\ b=-1$ **15.** $a=-1,\ b=5,\ c=3,\ d=0$, iar soluțiile sistemului sunt tripletele $\left(\frac{\alpha+8}{11},\ -\frac{7\alpha+1}{11},\ \alpha\right)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$ **16.** $a=-1,\ b=-1,\ c=1$ **17. a)** $\left(\frac{3\alpha}{2},\ \alpha,\ 3\alpha\right)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$; **b)** 3; **c)** $(3,\ 2,\ 6)$ **18.** $\left(\alpha-\beta,\ 2\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta\right)$, $\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{R}$ **19. a)** $a\in\{-20,\ 1\}$; **b)** $(-\alpha,\ -2\alpha,\ \alpha)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$ **20.** Dacă $a\in\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$, atunci sistemul admite numai soluția nulă, iar dacă $a=1$, atunci soluțiile sistemului sunt $\left(\frac{\alpha}{2},\ -\frac{3\alpha}{4},\ \frac{5\alpha}{4},\ \alpha\right)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$. **21.** Dacă $a\in\boldsymbol{R}\setminus\{-5,\ 2\}$, atunci sistemul admite numai soluția nulă, iar dacă $a=2$, atunci soluțiile sistemului sunt $\left(2\alpha,\ -\alpha,\ 3\alpha,\ \alpha\right)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$; iar dacă $a=-5$, atunci soluțiile sistemului sunt $\left(-\frac{34}{39}\alpha,\ \frac{8}{13}\alpha,\ \frac{2}{3}\alpha,\ \alpha\right)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$. **22. a)** $a\in\{0,\ 2\}$; **b)** dacă $a=1$ sistemul admite soluția $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$, iar dacă $a=2$, atunci sistemului admite soluțiile $\left(-4\alpha,\ 0,\ 3\alpha,\ \alpha\right)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

CAPITOLUL VI

ŞIRURI

Probleme rezolvate

1. ***Pentru fiecare dintre următoarele şiruri, scrieţi primii cinci termeni ai şirului, ştiind că termenul general este*:**

a) $a_n = 2n-3,\ \ n \in \boldsymbol{N}$ **;** **b)** $a_n = 1+2(-1)^n,\ \ n \in \boldsymbol{N}^*$ **;** **c)** $a_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right),\ \ n \in \boldsymbol{N}$;

d) $a_n = \frac{n}{2n+1},\ \ n \in \boldsymbol{N}^*$ **;** **e)** $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{n!},\ \ n \in \boldsymbol{N}^*$ **;** **f)** $a_n = \frac{n^2-2n}{(n+1)!},\ \ n \in \boldsymbol{N}$ **.**

Soluţie: a) $-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5$; **b)** $-1,\ 3,\ -1,\ 3,\ -1$; **c)** $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1$; **d)** $\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{11}$;

e) $-2,\ 2,\ -\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{4}{15}$; **f)** $0,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{15}$.

2. ***Determinaţi termenul general al fiecăruia dintre următoarele şiruri:***

a) $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots$**;** **b)** $-1,\ 3,\ -5,\ 7,\ -9,\ \ldots$**;** **c)** $0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \ldots$**;**

d) $0,\ 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ \ldots$**;** **e)** $\frac{2}{1\cdot 3},\ \frac{4}{3\cdot 5},\ \frac{6}{5\cdot 7},\ \frac{8}{7\cdot 9},\ \frac{10}{9\cdot 11},\ \ldots$**;** **f)** $\frac{1}{1},\ \frac{4}{3},\ \frac{9}{5},\ \frac{16}{7},\ \frac{25}{9},\ \ldots$**;**

g) $\frac{3}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{27}{8},\ \frac{81}{40},\ \ldots$**.**

Soluţie: a) Evident, $a_n = 2n$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

b) Se arată cu uşurinţă că $a_n = (-1)^n(2n-1)$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

c) Evident, $a_n = \frac{n}{2n+1}$ $(n \in \boldsymbol{N})$.

d) Întrucât $0 = 2^0 - 1,\ 1 = 2^1 - 1,\ 3 = 2^2 - 1,\ 7 = 2^3 - 1,\ 15 = 2^4 - 1$, rezultă că $a_n = 2^n - 1$ $(n \in \boldsymbol{N})$.

e) Se observă cu uşurinţă că $a_n = \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

f) Având în vedere că numărătorii fracţiilor considerate sunt pătratele primelor cinci numere naturale nenule, iar numitorii sunt, respectiv, primele cinci numere naturale impare, deducem că $a_n = \frac{n^2}{2n-1}$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

g) Deoarece $\frac{3}{1} = \frac{3^1}{1!},\ \frac{9}{2} = \frac{3^2}{2!},\ \frac{9}{2} = \frac{27}{6} = \frac{3^3}{3!},\ \frac{27}{8} = \frac{81}{24} = \frac{3^4}{4!}$ şi $\frac{81}{40} = \frac{243}{120} = \frac{3^5}{5!}$, rezultă că $a_n = \frac{3^n}{n!}$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

3. ***Fie şirul*** $(x_n)_{n \geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = \frac{n+1}{2n+3}$ ***şi*** $V = (0,\ 2)$ ***o vecinătate a lui*** 1**.** ***Arătaţi că, deşi,*** $x_n \in V$ ***, oricare ar fi*** $n \in \boldsymbol{N}^*$**, totuşi** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 1$ **.**

Soluţie: Deoarece $x_n > 0$ şi $x_n < 2$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că $x_n \in V$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$).

Remarcăm şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} \neq 1$. Cele stabilite anterior nu sunt contradictorii, căci există vecinătatea $V' = \left(\frac{1}{2},\ 2\right)$ a lui 1 care nu conține nici un termen al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ (fiindcă $x_n < \frac{1}{2}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$).

4. ***Arătați că şirul*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $a_n = 1 + (-1)^n$ ***este divergent.***

Soluție: Presupunem, din contra că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent; fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Remarcăm, mai întâi, că $a_{2n-1} = 0$ şi $a_{2n} = 2$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Dacă $a = 0$, atunci considerând vecinătatea $V' = (-1,\ 1)$ a lui 0, în afara ei se află o infinitate de termeni ai şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, şi anume, cei ce sunt egali cu 2. Deci, 0 nu poate fi limită a şirului considerat. Dacă $a = 2$, atunci considerând vecinătatea $V'' = (1,\ 3)$ a lui 2, în afara ei se află o infinitate de termeni ai şirului, şi anume, cei ce sunt egali cu 0. Prin urmare, nici 2 nu poate fi limită a şirului $(a_n)_{n\geq 1}$. Fie $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0,\ 2\}$. Se observă cu uşurință că există o vecinătate V a lui a astfel încât toți termenii şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ să fie în afara lui V. Drept urmare, nici $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0,\ 2\}$ nu este limită a şirului $(a_n)_{n\geq 1}$. Cum nici un număr real nu poate fi limită a şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, rezultă că acesta este divergent.

5. ***Se consideră şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$***, având termenul general*** $x_n = 2n + (-1)^{n+1}(n-1)$***. Calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$**.**

Soluție: Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[4n - (2n-1)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} (2n+1) = \infty$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (6n+2) = \infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

6. ***Se consideră şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$***, având termenul general*** $x_n = \cos\frac{n\pi}{3}$**.** ***Arătați că acest şir este divergent.***

Soluție: Având în vedere că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{6n} = \lim\limits_{n\to\infty} \cos 2n\pi = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_{6n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, deducem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

7. ***Dați un exemplu de şir care să aibă două subşiruri astfel încât unul să fie convergent, iar celălalt, divergent.***

Soluție: Să considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $a_n = \left(1 + (-1)^n\right)n^2$. Evident, $(a_{2n-1})_{n\geq 1}$ şi $(a_{2n})_{n\geq 1}$ sunt subşiruri ale şirului considerat. Deoarece $a_{2n-1} = 0$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, acest subşir este un şir convergent. Având în vedere că $a_{2n} = 8n^2$ şi că $\lim\limits_{n\to\infty} 8n^2 = \infty$, deducem că subşirul $(a_{2n})_{n\geq 1}$ este divergent.

8. ***Dați un exemplu de şiruri*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***şi*** $(b_n)_{n\geq 1}$ ***astfel încât*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$***, iar şirul*** $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ ***să nu aibă limită.***

Soluție: Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ şi şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $b_n = \frac{1}{n^2}$. Se arată cu uşurință că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Remarcând că $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, deducem că şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ nu are limită.

9. ***Se consideră şirurile*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***şi*** $(b_n)_{n\geq 1}$***. Dacă aceste şiruri sunt divergente, şirul*** $(a_n+b_n)_{n\geq 1}$ ***este divergent?***

Soluţie: 1) Să considerăm şirurile având ca termen general $a_n=1+(-1)^n$, respectiv $b_n=1+(-1)^{n+1}$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$. Se arată cu uşurinţă că fiecare dintre aceste şiruri este divergent. Remarcând că $a_n+b_n=2$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, deducem că şirul $(a_n+b_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

2) Să considerăm şirurile având ca termen general $a_n=1+(-1)^n$, respectiv $b_n=-1+2\cdot(-1)^n$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$. Se arată cu uşurinţă că aceste şiruri sunt divergente. Întrucât $a_n+b_n=3\cdot(-1)^n$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că şirul $(a_n+b_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

Din cele stabilite anterior deducem că despre şirul $(a_n+b_n)_{n\geq 1}$ nu putem spune nici că este divergent şi nici că este convergent.

10. ***Se consideră şirurile*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***şi*** $(b_n)_{n\geq 1}$ ***cu proprietatea că şirurile*** $(a_n+b_n)_{n\geq 1}$**,** $(a_nb_n)_{n\geq 1}$ ***şi*** $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ ***sunt convergente. Ce se poate spune despre convergenţa şirurilor*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***şi*** $(b_n)_{n\geq 1}$**?**

Soluţie: 1. Fie $a_n=\frac{1}{n^2}$ şi $b_n=\frac{1}{n}$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$. Atunci, $a_n+b_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}$, $a_nb_n=\frac{1}{n^3}$ şi $\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{n}$ (oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$). Evident, fiecare dintre aceste şiruri este convergent.

2. Fie $a_n=(-1)^n$ şi $b_n=(-1)^{n+1}$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$. În acest caz, $a_n+b_n=0$, $a_nb_n=(-1)^{2n+1}=-1$ şi $\frac{a_n}{b_n}=-1$ (oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$). Se arată cu uşurinţă că şirurile $(a_n+b_n)_{n\geq 1}$, $(a_nb_n)_{n\geq 1}$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ sunt convergente, iar şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt divergente.

Drept urmare, despre convergenţa şirurilor $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ nu se poate spune nimic.

11. ***Găsiţi două şiruri divergente*** $(x_n)_{n\geq 1}$**,** $(y_n)_{n\geq 1}$***, astfel încât să îndeplinească una dintre următoarele condiţii*****:**

a) ***şirul*** $(x_n-y_n)_{n\geq 1}$ ***să aibă limita egală cu*** **1;**

b) ***şirul*** $(x_n-y_n)_{n\geq 1}$ ***să aibă limita*** ∞**;**

c) ***şirul*** $(x_n-y_n)_{n\geq 1}$ ***să nu aibă limită.***

Soluţie: a) Se consideră şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n=n+1$, respectiv $y_n=n$. Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$. Deci, aceste şiruri sunt divergente. Deoarece $x_n-y_n=1$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=1$.

b) Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n=2n+1$, respectiv $y_n=n+1$. Se arată cu uşurinţă că aceste şiruri sunt divergente. Deoarece $x_n-y_n=n$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\infty$.

c) Să considerăm şirurile având termenul general $x_n=n+(-1)^n$, respectiv $y_n=n$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$. Având în vedere că $x_n\geq n-1$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)=\infty$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$. Remarcăm şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$. Deci, şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt divergente. Cum $x_n-y_n=(-1)^n$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că şirul $(x_n-y_n)_{n\geq 1}$ nu are limită. Astfel, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

12. ***Găsiți două șiruri*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***și*** $(y_n)_{n\geq 1}$***, astfel încât*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ ***și, totodată, șirul*** $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ ***să îndeplinească una dintre următoarele condiții:***

a) ***să fie convergent cu limita*** -1**;** **b)** ***să fie divergent cu limita*** ∞**;**

c) ***să fie divergent cu limita*** $-\infty$ **d)** ***să fie divergent fără limită.***

Soluție: a) Fie $x_n = -\dfrac{1}{n}$ și $y_n = n$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Se arată cu ușurință că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1) = -1$.

b) Fie $x_n = \dfrac{1}{n}$ și $y_n = n^2$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. Deci, șirul $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ este divergent cu limita ∞.

c) Fie $x_n = -\dfrac{1}{n^2}$ și $y_n = n^3$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$. Prin urmare, șirul $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ este divergent cu limita $-\infty$.

d) Fie $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ și $y_n = n$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Se arată cu ușurință că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Remarcând că $x_n y_n = (-1)^n$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, deducem că șirul $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ este divergent fără limită.

13. ***Se consideră șirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = \dfrac{1+(-1)^n n}{1+(-1)^{n+1} n}$***. Studiați convergența acestui șir.***

Soluție: Deoarece $x_{2n} = \dfrac{1+2n}{1-2n}$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = -1$. Având în vedere că $x_{2n+1} = \dfrac{1-(2n+1)}{1+(2n+1)} = -\dfrac{n}{n+1}$ $(n \in \boldsymbol{N})$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = -1$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$, ceea ce arată că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

14. ***Se consideră șirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = \dfrac{1+(-1)^n n^2}{n^2+n+2}$***. Studiați convergența acestui șir.***

Soluție: Întrucât $x_{2n} = \dfrac{4n^2+1}{4n^2+2n+2}$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 1$. Remarcând că $x_{2n+1} = -\dfrac{4n^2+4n}{4n^2+6n+4}$ $(n \in \boldsymbol{N})$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = -1$. Cum $(x_{2n})_{n\geq 1}$ și $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sunt subșiruri ale șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ și converg la limite diferite, conchidem că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

15. a) ***Fie șirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$***. Arătați că, deși, șirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***este divergent, totuși șirul*** $(y_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $y_n = x_n^3 + x_n^4$ ***este convergent.***

b) ***Fie*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***un șir de numere reale nenule. Arătați că, dacă șirurile*** $\left(x_n^2\right)_{n\geq 1}$ ***și*** $\left(x_n^3 + x_n^4\right)_{n\geq 1}$ ***sunt convergente, atunci șirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***este convergent.***

Soluție: a) Deoarece $x_{2n-1} = -1$ și $x_{2n} = 0$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este divergent. Remarcând că $y_{2n-1} = x_{2n-1}^3 + x_{2n-1}^4 = 0$, iar $y_{2n} = x_{2n}^3 + x_{2n}^4 = 0$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, deducem că $y_n = 0$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Deci, șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) Fie $y_n = x_n^3 + x_n^4$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = a$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ $(a,\ b \in \boldsymbol{R})$.

1. Dacă $a=0$, atunci şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2=0$, ceea ce conduce la $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2=0$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

2. Fie $a\neq 0$. Cum $x_n=\dfrac{x_n^3}{x_n^2}=\dfrac{x_n^4+x_n^3-x_n^4}{x_n^2}=\dfrac{y_n-x_n^4}{x_n^2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{b-a^2}{a}$. Având în vedere cele stabilite anterior, conchidem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

16. ***Se consideră şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***astfel încât subşirurile*** $(x_{2n})_{n\geq 1}$, $(x_{2n+1})_{n\geq 1}$ ***şi*** $(x_{3n})_{n\geq 1}$ ***să fie convergente. Arătaţi că şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***este convergent.***

Soluţie: Să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=b$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=c$ $(a,\ b,\ c\in \boldsymbol{R})$. Deoarece $6n=2(3n)$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{6n}=a$. Totodată, $6n=3(2n)$, ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{6n}=c$. Având în vedere că limita unui şir convergent este unică, deducem că $a=c$. Întrucât $6n+3=3(2n+1)$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{6n+3}=c$. Pe de altă parte, $6n+3=2(3n+1)+1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_{6n+3}=b$. Deducem că $c=b$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $a=b$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$, ceea ce implică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Cum $a\in \boldsymbol{R}$, conchidem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

17. ***Calculaţi limita fiecăruia dintre următoarele şiruri având termenul general*****:**

a) $a_n=2^n+3^n-5^n$**;** **b)** $a_n=\dfrac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$**;** **c)** $a_n=\dfrac{6^{n+1}}{(2^n+1)(3^n+1)}$**;** **d)** $a_n=\dfrac{2^n-3^n-4\cdot 5^n}{3^n+2\cdot 5^n}$**.**

Soluţie: a) Deoarece $a_n=5^n\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-1\right]$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} 5^n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

b) Având în vedere că $a_n=\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\cdot\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\dfrac{4}{5}\right)^n+1}$ şi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=0$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

c) Se arată cu uşurinţă că $a_n=\dfrac{6\cdot 2^n\cdot 3^n}{2^n\cdot 3^n\left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)\left(1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)}=\dfrac{6}{\left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)\left(1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)}$. Ţinând seama şi de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$, conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=6$.

d) Întrucât $a_n=\dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-4}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+2}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-2$.

18. ***Se consideră şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n=\dfrac{2+3}{5}+\dfrac{2^2+3^2}{5^2}+\ldots+\dfrac{2^n+3^n}{5^n}$**.** ***Calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$**.**

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, că

$$x_n=\left[\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+...+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+...+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]=\frac{2}{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]+\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right].$$

Deoarece $0<\frac{2}{5}<1$ şi $0<\frac{3}{5}<1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$. Drept urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}$.

19. ***Fie*** $a,\ b\in(0,\ \infty)$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n=\dfrac{a^n+2b^n}{3a^n+b^n}$***. Calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$**.**

Soluţie: Dacă $a<b$, atunci $0<\frac{a}{b}<1$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$. Remarcând şi faptul că $x_n=\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^n+2}{3\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$. Dacă $a>b$, atunci $0<\frac{b}{a}<1$, ceea ce conduce la $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$. Având în vedere şi faptul că $x_n=\dfrac{1+2\left(\frac{b}{a}\right)^n}{3+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3}$. Dacă $a=b$, atunci $x_n=\frac{3}{4}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{4}$.

20. ***Fie*** $a\in\boldsymbol{R}$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n=\dfrac{3^n}{3^{n+1}+a^n}$***. Calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$**.**

Soluţie: Dacă $|a|<3$, atunci $\left|\frac{a}{3}\right|<1$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n=0$. Cum $x_n=\dfrac{1}{3+\left(\frac{a}{3}\right)^n}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3}$.

Dacă $|a|>3$, atunci $\left|\frac{3}{a}\right|<1$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{a}\right)^n=0$. Având în vedere şi faptul că $x_n=\dfrac{\left(\frac{3}{a}\right)^n}{3\left(\frac{3}{a}\right)^n+1}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Dacă $a=3$, atunci $x_n=\frac{1}{4}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{4}$.

Fie $a=-3$. În acest caz, $x_n=\dfrac{3^n}{3^{n+1}+(-3)^n}=\dfrac{1}{3+(-1)^n}$. Ţinând seama că $x_{2n}=\frac{1}{4}$, iar $x_{2n+1}=\frac{1}{2}$ ($n\in\boldsymbol{N}$), deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\frac{1}{4}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=\frac{1}{2}$. Drept urmare, în cazul considerat, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ nu există.

21. ***Fie*** $a\geq 0$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n=\dfrac{2^n}{a^n+2^n}+\dfrac{3^n}{a^n+3^n}$***. Calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$**.**

Soluţie: Ţinând seama de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{a^n+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^n+1}=\begin{cases}1 & ,\ \text{dacă } a\in[0,\ 2)\\ \frac{1}{2} & ,\ \text{dacă } a=2\\ 0 & ,\ \text{dacă } a\in(2,\ \infty)\end{cases}$, iar

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{a^n+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{3}\right)^n+1}=\begin{cases}1 & ,\ \text{dacă } a\in[0,\ 3)\\ \dfrac{1}{2} & ,\ \text{dacă } a=3\\ 0 & ,\ \text{dacă } a\in(3,\ \infty)\end{cases}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}2 & ,\ \text{dacă } a\in[0,\ 2)\\ \dfrac{3}{2} & ,\ \text{dacă } a=2\\ 1 & ,\ \text{dacă } a\in(2,\ 3)\\ \dfrac{1}{2} & ,\ \text{dacă } a=3\\ 0 & ,\ \text{dacă } a\in(3,\ \infty)\end{cases}$.

22. ***Se consideră şirul*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $a_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+...+\dfrac{n}{3^n}$. ***Calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Soluţie: Deoarece $\dfrac{2}{3}a_n=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)a_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+...+\dfrac{n}{3^n}-\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{2}{3^3}-...-\dfrac{n-1}{3^n}-\dfrac{n}{3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+...+$

$+\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{n}{3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}-\dfrac{n}{3^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)-\dfrac{n}{3^{n+1}}$, rezultă că $a_n=\dfrac{3}{4}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{n}{3^{n+1}}$. Având în vedere că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3^{n+1}}=0$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{3}{4}$.

23. ***Se consideră şirurile*** $(a_n)_{n\geq 0}$ ***şi*** $(b_n)_{n\geq 0}$ ***definite prin*** $a_0=3,\ a_n=\dfrac{1}{3}a_{n-1}-4$ $(n\in\boldsymbol{N}^*)$ ***şi*** $b_n=a_n+6$ $(n\in\boldsymbol{N})$. ***Arătaţi că şirul*** $(b_n)_{n\geq 0}$ ***este o progresie geometrică şi, apoi, calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ ***şi*** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Soluţie: Se arată cu uşurinţă că $b_n=\dfrac{1}{3}a_{n-1}+2=\dfrac{1}{3}\left(b_{n-1}-6\right)+2=\dfrac{1}{3}b_{n-1}$ (oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$). Rezultă că şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ este o progresie geometrică având raţia $\dfrac{1}{3}$. Deducem că $b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n b_0$. Având în vedere că $b_0=a_0+6=9$, conchidem că $b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$. Drept urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. Cum $a_n=b_n-6$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-6$.

24. ***Se consideră şirurile*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***şi*** $(b_n)_{n\geq 1}$ ***definite prin*** $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{5a_n+3}{a_n+3}$, $b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$ $(n\in\boldsymbol{N}^*)$. ***Arătaţi că şirul*** $(b_n)_{n\geq 1}$ ***este o progresie geometrică şi, apoi, calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ ***şi*** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, că $b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}=\dfrac{\dfrac{5a_n+3}{a_n+3}-3}{\dfrac{5a_n+3}{a_n+3}+1}=\dfrac{2a_n-6}{6a_n+6}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_n-3}{a_n+1}=\dfrac{1}{3}\cdot b_n$ (oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$). Cum $b_{n+1}=\dfrac{1}{3}\cdot b_n$ (oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$), rezultă că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică având raţia $\dfrac{1}{3}$. Deducem că $b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}b_1$. Având în vedere că $b_1=\dfrac{a_1-3}{a_1+1}=-\dfrac{1}{3}$, deducem că $b_n=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. Cum $a_n=\dfrac{b_n+3}{1-b_n}$, conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$.

25. ***Fie*** $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$ ***astfel încât*** $b \neq 1,\ |c|<1$ ***şi*** $|bc|<1$. ***Se consideră şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = ac + (a+ab)c^2 + (a+ab+ab^2)c^3 + \ldots + (a+ab+\ldots+ab^n)c^{n+1}$. ***Calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, că $x_n = ac\left[1 + (1+b)c + (1+b+b^2)c^2 + \ldots + (1+b+\ldots+b^n)c^n\right] =$

$$= ac\left[1 + \frac{1-b^2}{1-b}c + \frac{1-b^3}{1-b}c^2 + \ldots + \frac{1-b^{n+1}}{1-b}c^n\right] = \frac{ac}{1-b}\left[(1+c+c^2+\ldots+c^n) - b(1+bc+b^2c^2+\ldots+b^nc^n)\right] =$$

$$= \frac{ac}{1-b}\left[\frac{1-c^{n+1}}{1-c} - \frac{b\left(1-(bc)^{n+1}\right)}{1-bc}\right].$$

Ţinând seama şi de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} c^{n+1} = 0$ (căci $|c|<1$), iar $\lim\limits_{n\to\infty} (bc)^n = 0$ (căci $|bc|<1$), conchidem că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{ac}{1-b}\left(\frac{1}{1-c} - \frac{b}{1-bc}\right) = \frac{ac}{(1-c)(1-bc)}.$$

26. ***Se consideră şirurile*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***şi*** $(b_n)_{n\geq 1}$ ***definite prin*** $a_1 = 2,\ b_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n+b_n},\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{a_n+b_n}$, $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. ***Determinaţi*** $a_n,\ b_n$ ***în funcţie de*** n ***şi, apoi, calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Soluţie: Deoarece $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - b_n^2}{a_n+b_n} = a_n - b_n$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că $a_n - b_n = a_1 - b_1$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Totodată, $a_1 - b_1 = -1$, deci, $a_n - b_n = -1$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Pe de altă parte,

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 = \left[\left(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right)^{2^2} = \left[\left(\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}\right)^2\right]^{2^2} = \left(\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}\right)^{2^3} = \ldots = \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{2^{n-1}} = \left[\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2\right]^{2^{n-1}} = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{2^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2^n},$$

oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$. Prin urmare, $\dfrac{a_n}{b_n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2^{n-1}}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Remarcând că $a_n - b_n = -1$ şi $\dfrac{a_n}{b_n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2^{n-1}}$, deducem că $a_n = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n-1}}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n-1}}}$ şi $b_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n-1}}}$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$). Întrucât $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2^{n-1}} = 0$. Drept urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

27. ***Fie*** $a \in \boldsymbol{R}$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = a^{n+2} - 4a^n + 1$. ***Determinaţi, în funcţie de valorile lui*** a, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, că $x_n = a^n(a^2-4) + 1$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Dacă $a = -2$ sau $a = 2$, atunci $x_n = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Fie $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{-2,\ 2\}$. Ţinând seama de faptul că

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \text{nu există} & , \text{ dacă } a \leq -1 \\ 0 & , \text{ dacă } -1 < a < 1 \\ 1 & , \text{ dacă } a = 1 \\ \infty & , \text{ dacă } a > 1 \end{cases}, \text{ deducem că:}$$

dacă $a \in (-\infty,\ -2) \cup (-2,\ -1]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ nu există; dacă $a \in (-1,\ 1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; dacă $a = 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -2$; dacă $a \in (1,\ 2)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (căci $a^2 - 4 < 0$); dacă $a \in (2,\ \infty)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ (fiindcă $a^2 - 4 > 0$).

28. ***Fie*** $a \in \boldsymbol{R}$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n \geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = \dfrac{a^n + 2^n}{3^n + 4^n}$. ***Calculaţi*** $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Soluţie: Evident, $x_n = \dfrac{\left(\dfrac{a}{4}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 1}$. Remarcând şi faptul că $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$, iar

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a}{4}\right)^n = \begin{cases} \text{nu există} & , \text{ dacă } a \leq -4 \\ 0 & , \text{ dacă } -4 < a < 4 \\ 1 & , \text{ dacă } a = 4 \\ \infty & , \text{ dacă } a > 4 \end{cases}, \text{ deducem că } \lim_{n \to \infty} x_n = \begin{cases} \text{nu există} & , \text{ dacă } a \leq -4 \\ 0 & , \text{ dacă } -4 < a < 4 \\ 1 & , \text{ dacă } a = 4 \\ \infty & , \text{ dacă } a > 4 \end{cases}.$$

29. ***Se consideră şirul*** $(x_n)_{n \geq 1}$ ***definit prin*** $x_1 > 0$ ***şi*** $3x_{n+1} > 4x_n$, $n \in \boldsymbol{N}^*$. ***Calculaţi*** $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Soluţie: Vom demonstra, mai întâi, propoziţia $P(n)$: $x_n > 0$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Deoarece $x_1 > 0$, rezultă că $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $x_k > 0$ ($k \in \boldsymbol{N}^*$). Cum $x_k > 0$, rezultă că $4x_k > 0$ şi, cum $3x_{k+1} > 4x_k$, conchidem că $3x_{k+1} > 0$, de unde $x_{k+1} > 0$, ceea ce arată că şi $P(k+1)$ este adevărată. Deci, $P(n)$ este adevărată. Având în vedere că $\dfrac{x_{k+1}}{x_k} > \dfrac{4}{3}$, oricare ar fi $k \in \boldsymbol{N}^*$, deducem că $\dfrac{x_2}{x_1} > \dfrac{4}{3}$, $\dfrac{x_3}{x_2} > \dfrac{4}{3}$, $\dfrac{x_4}{x_3} > \dfrac{4}{3}$, ..., $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} > \dfrac{4}{3}$. Înmulţind membru cu membru aceste inegalităţi, deducem că $\dfrac{x_n}{x_1} > \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$, ceea ce conduce la $x_n > \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1} x_1$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Ţinând seama şi de faptul că $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1} = \infty$ (căci $\dfrac{4}{3} > 1$), iar $x_1 > 0$, conchidem că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$.

30. ***Fie*** $a \in [0, \infty)$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n \geq 0}$ ***definit prin*** $x_0 = a$ ***şi*** $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$ $(n \in \boldsymbol{N})$. ***Calculaţi, în funcţie de valorile lui*** a, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Soluţie: Pentru început, remarcăm că $x_1 = x_0^2 - 2x_0 + 2 = (x_0 - 1)^2 + 1 = (a-1)^2 + 1$, $x_2 = (x_1 - 1)^2 + 1 = (a-1)^{2^2} + 1$, $x_3 = (x_2 - 1)^2 + 1 = (a-1)^{2^3} + 1$. Aceste rezultate ne sugerează că $x_n = (a-1)^{2^n} + 1$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$, ceea ce se demonstrează prin inducţie matematică. Drept urmare:

dacă $a \in \{0, 2\}$, atunci $x_n = 2$, iar $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$;

dacă $a \in (0, 2)$, atunci $|a-1| < 1$, ceea ce implică $\lim\limits_{n \to \infty} (a-1)^{2^n} = 0$, de unde $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$;

dacă $a \in (2, \infty)$, atunci $a - 1 > 1$, ceea ce conduce la $\lim\limits_{n \to \infty} (a-1)^{2^n} = \infty$ şi, deci, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$.

31. ***Calculaţi limita şirului cu termenul general*** $(a_n)_{n \geq 1}$ ***în fiecare dintre următoarele situaţii:***

a) $a_n = \dfrac{3n^2 - 5n}{n^3 + n^2 - 1}$; **b)** $a_n = \dfrac{2n^3 + n^2 - 3}{3n^3 + n + 1}$; **c)** $a_n = \dfrac{4n^4 + 3n^2 - 1}{-2n^3 + 1}$; **d)** $a_n = \dfrac{2n^3 + 3n + 1}{n^2 + 1}$.

Soluţie: a) Având în vedere că $a_n = \dfrac{n^2\left(3 - \dfrac{5}{n}\right)}{n^3\left(1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}\right)} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{3 - \dfrac{5}{n}}{1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}}$, iar $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3 - \dfrac{5}{n}}{1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}} = 3$,

deducem că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

b) Deoarece $a_n=\dfrac{n^3\left(2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(3+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)}=\dfrac{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^3}}{3+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^3}}{3+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}3}=\dfrac{2}{3}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2}{3}$.

c) Întrucât $a_n=\dfrac{n^4\left(4+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}\right)}{n^3\left(-2+\dfrac{1}{n^3}\right)}=n\cdot\dfrac{4+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}}{-2+\dfrac{1}{n^3}}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}}{-2+\dfrac{1}{n^3}}=-2$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

d) Remarcând că $a_n=\dfrac{n^3\left(2+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}=n\cdot\dfrac{2+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=2$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

32. ***Calculaţi limita şirului cu termenul general*** $(a_n)_{n\ge1}$ ***în fiecare dintre următoarele situaţii*****:**

a) $a_n=\dfrac{2n^2+n-1}{n-1}-\dfrac{2n^2-1}{n+1}$; **b)** $a_n=\dfrac{n^2+2}{n+1}-\dfrac{2n^2+1}{2n-1}$; **c)** $a_n=\dfrac{4n^2+3n-2}{2n+3}-2n+1$.

Soluţie: a) Remarcând că $a_n=\dfrac{(2n^2+n-1)(n+1)-(2n^2-1)(n-1)}{n^2-1}=\dfrac{5n^2+n-2}{n^2-1}=\dfrac{5+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$.

b) Deoarece $a_n=\dfrac{(n^2+2)(2n+1)-(2n^2+1)(n+1)}{(n+1)(2n-1)}=\dfrac{-3n^2+3n-3}{2n^2+n-1}=\dfrac{-3+\dfrac{3}{n}-\dfrac{3}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\dfrac{3}{2}$.

c) Având în vedere că $a_n=\dfrac{4n^2+3n-2+(1-2n)(2n+3)}{2n+3}=\dfrac{1-n}{2n+3}=\dfrac{\dfrac{1}{n}-1}{2+\dfrac{3}{n}}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\dfrac{1}{2}$.

33. ***Fie*** $a,\ b\in\boldsymbol{R}$, $a>0$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n\ge1}$ ***având termenul general*** $x_n=\dfrac{n^2}{an+b}-\dfrac{n}{2}$. ***Determinaţi*** a ***şi*** b, ***astfel încât*** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{4}$.

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, că $x_n=\dfrac{(2-a)n^2-b\,n}{2a\,n+2b}$, ceea ce arată că, dacă $a\ne2$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ este ∞ sau $-\infty$. Deci, este necesar ca $a=2$. Atunci $x_n=\dfrac{-b\,n}{4n+2b}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\dfrac{b}{4}$. Totodată, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{4}$ şi, deci, $b=-1$.

34. ***Fie*** $a,\ b\in\boldsymbol{R}$, $a>0$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n\ge1}$ ***având termenul general*** $x_n=\dfrac{6n^2+an-1}{2n+1}+bn+1$. ***Determinaţi*** a ***şi*** b, ***astfel încât*** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

Soluţie: Evident, $x_n=\dfrac{6n^2+an-1+(bn+1)(2n+1)}{2n+1}=\dfrac{(2b+6)n^2+(a+b+2)n}{2n+1}$. Rezultă că, dacă $2b+6\ne0$,

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ este $-\infty$ sau ∞. Deci, este necesar ca $2b+6=0$, ceea ce conduce la $b=-3$. Atunci, $x_n=\dfrac{(a-1)\ n}{2n+1}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{a-1}{2}$. Având în vedere că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$, deducem că $a=5$.

35. ***Fie*** $a_k=\dfrac{(k+1)^2}{k(k+2)}$, $k\in \boldsymbol{N}^*$ ***şi şirurile*** $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$, $\left(c_n\right)_{n\geq 1}$ ***definite prin*** $b_n=a_1+a_2+\ldots+a_n-n$, $c_n=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$. ***Calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ***şi*** $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Soluţie: Observăm că $b_n=(a_1-1)+(a_2-1)+\ldots+(a_n-1)=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-1)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{(k+1)^2}{k(k+2)}-1\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+2)}=$

$=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)=$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}$.

Remarcând că $c_n=\dfrac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\dfrac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\dfrac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\dfrac{2(n+1)}{n+2}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=2$.

36. ***Calculaţi limita şirului cu termenul general*** a_n ***în fiecare dintre următoarele situaţii*****:**

a) $a_n=\sqrt{2n^2+n-1}-n$; **b)** $a_n=\sqrt{2n+3}-\sqrt{3n+2}$; **c)** $a_n=\sqrt{n^4+2n}-2n^2+1$;

d) $a_n=\sqrt[3]{n^3+n^2}-2n$; **e)** $a_n=\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n+2}$.

Soluţie: a) Deoarece $a_n=n\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}-1\right)$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}-1\right)=\sqrt{2}-1>0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

b) Având în vedere că $a_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\dfrac{3}{n}}-\sqrt{3+\dfrac{2}{n}}\right)$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+\dfrac{3}{n}}-\sqrt{3+\dfrac{2}{n}}\right)=$

$=\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

c) Întrucât $a_n=n^2\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n^3}}-2+\dfrac{1}{n^2}\right)$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} n^2=\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n^3}}-2+\dfrac{1}{n^2}\right)=-1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

d) Remarcând că $a_n=n\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}}-2\right)$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}}-2\right)=-1$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

e) Evident, $a_n=\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}\right)$. Ţinând seama şi de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}=\infty$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}\right)=1$, conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

37. ***Calculaţi limita şirului cu termenul general*** a_n ***în fiecare dintre următoarele situaţii*****:**

a) $a_n=\sqrt{n^2+2n}-n$; **b)** $a_n=n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$; **c)** $a_n=n^2\left(\sqrt{\dfrac{n+2}{n+3}}-\sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}\right)$;

d) $a_n=\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}$; **e)** $a_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}-3\sqrt{n}\right)$;

f) $a_n = n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}} - n\sqrt{2}\right)$; **g)** $a_n = \sqrt[3]{n^3+3n^2} - \sqrt{n^2+2n}$.

Soluție: a) Având în vedere că $a_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Întrucât $a_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

c) Remarcând că $a_n = \dfrac{n^2\left(\dfrac{n+2}{n+3}-\dfrac{n+1}{n+2}\right)}{\sqrt{\dfrac{n+2}{n+3}}+\sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}} = \dfrac{\dfrac{n^2}{(n+3)(n+2)}}{\sqrt{\dfrac{n+2}{n+3}}+\sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}}$ și că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(n+3)(n+2)} = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n+2}{n+3}}+\sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}\right) = 2$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

d) Deoarece $a_n = \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

e) Ținând seama că $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)+2\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} + \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, și că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 2\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1} = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 1$, conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

f) Evidențiind faptul că $a_n = \dfrac{n^3\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2}} = \dfrac{n^3}{\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)} =$

$= \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}+1\right)}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

g) Întrucât $a_n = \sqrt[3]{n^3+3n^2} - n - \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) = \dfrac{3n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3+3n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2} - \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} =$

$= \dfrac{3}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}+1} - \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

38. ***Fie*** $a \in \boldsymbol{R}$ ***şi şirul*** x_n ***având termenul general*** $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+a\sqrt{n+2}\right)$. ***Calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluție: Evident, $x_n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+a\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}\right)$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+a\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}\right) = a+1$, rezultă că dacă $a \in (-1,\ \infty)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, iar dacă $a \in (-\infty,\ -1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Dacă $a = -1$, atunci $x_n = \dfrac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$ și, deci, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\dfrac{1}{2}$.

39. ***Fie*** $a \in \boldsymbol{R}$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n \geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = n^a\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)$.

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluţie: Pentru a putea să evităm situaţiile de nedeterminare, trebuie să aducem expresia din membrul al doilea al egalităţii din enunţ la o formă care să permită operaţiile cu limite de şiruri. Evident,

$$x_n = n^a \cdot \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)(n+3)}} = 4n^a \cdot \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+3)}} =$$

$$= 4n^{a-2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}} \cdot \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}.$$

Remarcând că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}} = \frac{1}{2}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+3)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}} = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n^{a-2} = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } a<2 \\ 1 & , \text{ dacă } a=2 \\ \infty & , \text{ dacă } a>2 \end{cases}$, deducem că

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } a<2 \\ 1 & , \text{ dacă } a=2 \\ \infty & , \text{ dacă } a>2 \end{cases}$.

40. ***Fie*** $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n \geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = \sqrt{n^2+an+2}+bn$. ***Determinaţi*** a ***şi*** b, ***astfel încât*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Soluţie: Evident, $x_n = n\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}+b\right)$. Remarcând că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}+b\right) = b+1$, deducem că, dacă $b<-1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, iar dacă $b>-1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Deci, este necesar ca $b=-1$. În acest caz, $x_n = \sqrt{n^2+an+2}-n = \frac{an+2}{\sqrt{n^2+an+2}+n} = \frac{a+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}+1}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{a}{2}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, rezultă că $a=2$. Prin urmare, $a=2$ şi $b=-1$.

41. ***Fie*** $a,\ b \in \boldsymbol{R}$, $a>0$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n \geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = n\left(\sqrt{an^2+bn+3}-n+1\right)$.

Determinaţi a ***şi*** b, ***astfel încât*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ***să existe şi să fie finită.***

Soluţie: Deoarece $x_n = n^2\left(\sqrt{a+\frac{b}{n}+\frac{3}{n^2}}-1+\frac{1}{n}\right)$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{a+\frac{b}{n}+\frac{3}{n^2}}-1+\frac{1}{n}\right) = \sqrt{a}-1$, rezultă că, dacă $a \in (0,\ 1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, iar dacă $a \in (1,\ \infty)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Deci, este necesar ca $a=1$. În acest caz, $x_n = n\left[\sqrt{n^2+bn+3}-(n-1)\right] = \frac{n(n^2+bn+3-n^2+2n-1)}{\sqrt{n^2+bn+3}+n-1} = \frac{(b+2)n+2}{\sqrt{1+\frac{b}{n}+\frac{3}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}$.

Rezultă că, dacă $b<-2$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, iar dacă $b>-2$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Prin urmare, este necesar ca $b=-2$. Se arată cu uşurinţă că pentru $a=1$ şi $b=-2$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. În consecinţă, $a=1$ şi $b=-2$ reprezintă soluţia problemei.

42. ***Găsiți două şiruri*** $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, ***astfel încât*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ ***şi care, totodată, să îndeplinească una dintre următoarele condiții:***

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$ **;** **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$ **;** **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 2$ **;** **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ ***nu există.***

Soluție: **a)** Fie $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ şi $b_n = n^2$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Deoarece $a_n^{b_n} = \left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-n}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(-n) = -\infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$.

b) Fie $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ şi $b_n = n^2$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Evidențiind faptul că $a_n^{b_n} = \left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^{n}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.

c) Fie $a_n = 1 + \dfrac{\ln 2}{n}$ şi $b_n = n$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Întrucât $a_n^{b_n} = \left[\left(1+\dfrac{\ln 2}{n}\right)^{\frac{n}{\ln 2}}\right]^{\ln 2}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\ln 2}{n}\right)^{\frac{n}{\ln 2}} = e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \ln 2 = \ln 2$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\ln 2} = 2$.

d) Fie $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ şi $b_n = n$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Se arată cu uşurință că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Notăm $a_n^{b_n} = x_n$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Remarcând că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)^{-(2n+1)}\right]^{-1} = e^{-1}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ nu există.

43. ***Se consideră şirul*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$**.** ***Calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$**.**

Soluție: Pentru evitarea unor operații fără sens (nedeterminări) care pot interveni în calcularea respectivei limite, vom scrie termenul general al şirului sub forma:

$$a_n = 2\left(\frac{2}{2+\frac{1}{n}}\right)^n = 2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = 2\left(1+\frac{-1}{2n+1}\right)^n = 2\left[\left(1+\frac{-1}{2n+1}\right)^{-(2n+1)}\right]^{-\frac{n}{2n+1}}.$$

Remarcând şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{2n+1}\right)^{-(2n+1)} = e$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{2n+1} = -\dfrac{1}{2}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

44. ***Calculați limita şirului cu termenul general*** a_n ***în fiecare dintre următoarele situații*****:**

a) $a_n = \left(\dfrac{3n+4}{3n+2}\right)^n$**;** **b)** $a_n = \left(\sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}}\right)^n$**;** **c)** $a_n = \left(\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n$**;** **d)** $a_n = \left(n-\sqrt{n^2-2n}\right)^n$**.**

Soluție: **a)** Deoarece $a_n = \left(1+\dfrac{2}{3n+2}\right)^n = \left[\left(1+\dfrac{2}{3n+2}\right)^{\frac{3n+2}{2}}\right]^{\frac{2n}{3n+2}}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3n+2}\right)^{\frac{3n+2}{2}} = e$ şi

$\lim\limits_{n\to\infty}\ \dfrac{2n}{3n+2}=\dfrac{2}{3}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\ a_n=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}$.

b) Remarcând că $a_n=\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}=\left[\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{2(n+1)}}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\ \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\ \dfrac{n}{2(n+1)}=\dfrac{1}{2}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\ a_n=\sqrt{e}$.

c) Având în vedere că $a_n=\left(\sqrt{\dfrac{(n+1)^2}{n^2+1}}\right)^n=\left(\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+1}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(1+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)^{\frac{n}{2}}=\left[\left(1+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}}\right]^{\frac{n^2}{n^2+1}}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\ \left(1+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}}=e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\ \dfrac{n^2}{n^2+1}=1$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\ a_n=e$.

d) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{n\to\infty}\ \left(n-\sqrt{n^2-2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\ \dfrac{2n}{n+\sqrt{n^2-2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\ \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}}=1$ şi că $\lim\limits_{n\to\infty}\ n=\infty$. Acest rezultat ne sugerează că trebuie să scriem pe a_n astfel: $a_n=\left(1+n-\sqrt{n^2-2n}-1\right)^n=\left\{\left[1+\left(n-1-\sqrt{n^2-2n}\right)\right]^{\frac{1}{n-1-\sqrt{n^2-2n}}}\right\}^{n\left(n-1-\sqrt{n^2-2n}\right)}$. Evidențiind şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\ \left[1+\left(n-1-\sqrt{n^2-2n}\right)\right]^{\frac{1}{n-1-\sqrt{n^2-2n}}}=e$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\ n\left(n-1-\sqrt{n^2-2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\ \dfrac{n\left(n^2-2n+1-n^2+2n\right)}{n-1+\sqrt{n^2-2n}}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\ \dfrac{n}{n-1+\sqrt{n^2-2n}}=\dfrac{1}{2}$, conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty}\ a_n=\sqrt{e}$.

45. ***Fie*** $a\in(0,\ \infty)$ ***şi şirul*** $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n=\left(\dfrac{a\,n+1}{2n+3}\right)^n$. ***Aflați*** $\lim\limits_{n\to\infty}\ x_n$.

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{n\to\infty}\ \dfrac{a\,n+1}{2n+3}=\dfrac{a}{2}$. Dacă $a\in(0,\ 2)$, atunci $0<\dfrac{a}{2}<1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\ x_n=0$. Dacă $a\in(2,\ \infty)$, atunci $\dfrac{a}{2}>1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\ x_n=\infty$. Fie $a=2$. În acest caz, $\lim\limits_{n\to\infty}\ x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ \left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^n=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\ \left[\left(1+\dfrac{-2}{2n+3}\right)^{-\frac{2n+3}{2}}\right]^{-\frac{2n}{2n+3}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

46. ***Fie*** $a,\ b\in\boldsymbol{R}^*$, $a>0$ ***şi şirul*** $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n=\left(a+\dfrac{bn}{n^2-n+1}\right)^n$. ***Determinați*** a ***şi*** b, ***astfel încât*** $\lim\limits_{n\to\infty}\ x_n=e^2$.

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{n\to\infty}\ \left(a+\dfrac{bn}{n^2-n+1}\right)=a$. Rezultă că, dacă $a\in(0,\ 1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\ x_n=0$, iar dacă $a\in(1,\ \infty)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\ x_n=\infty$. Deci, este necesar ca $a=1$. În acest caz, $\lim\limits_{n\to\infty}\ x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ \left(1+\dfrac{bn}{n^2-n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ \left[\left(1+\dfrac{bn}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-n+1}{bn}}\right]^{\frac{bn^2}{n^2-n+1}}=e^b$. Totodată, $\lim\limits_{n\to\infty}\ x_n=e^2$, deci $b=2$.

47. ***Fie*** $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = an + b - \sqrt{n^2+c}$**.** ***Determinaţi*** a , b ***şi*** c ***astfel încât*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ ***şi*** $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^n = e$**.**

Soluţie: Evident, $x_n = n\left(a + \dfrac{b}{n} - \sqrt{1+\dfrac{c}{n^2}}\right)$. Remarcând că $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a + \dfrac{b}{n} - \sqrt{1+\dfrac{c}{n^2}}\right) = a-1$, deducem că, dacă $a \in (-\infty,\ 1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, iar dacă $a \in (1,\ \infty)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Deci, este necesar ca $a = 1$. În acest caz, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n^2+c} + b\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-c}{n+\sqrt{n^2+c}} + b\right) = b$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, rezultă că $b = 1$. Atunci,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+n-\sqrt{n^2+c}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-c}{n+\sqrt{n^2+c}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-c}{n+\sqrt{n^2+c}}\right)^{\frac{n+\sqrt{n^2+c}}{-c}}\right]^{-\frac{cn}{n+\sqrt{n^2+c}}} = e^{-\frac{c}{2}}.$$

Totodată, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n = e$, deci, $-\dfrac{c}{2} = 1$, de unde $c = -2$.

48. ***Folosind criteriul majorării, arătaţi că*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$**.**

Soluţie: Se observă cu uşurinţă că $\dfrac{n^2}{2^n} = \dfrac{n^2}{(1+1)^n} = \dfrac{n^2}{1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^n} < \dfrac{n^2}{C_n^3} = \dfrac{6n}{(n-1)(n-2)}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$ şi $n \geq 3$. Cum $0 < \dfrac{n^2}{2^n} < \dfrac{6n}{(n-1)(n-2)}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$ şi $n \geq 3$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n}{(n-1)(n-2)} = 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$.

49. ***Folosind criteriul majorării, arătaţi că*** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$**.**

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, că $\sqrt[n]{n} > 1$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$ şi $n \geq 2$. Fie $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Rezultă că $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$, ceea ce conduce la $n = (1+x_n)^n$. Având în vedere că $n = (1+x_n)^n = 1 + C_n^1 x_n + C_n^2 x_n^2 + \ldots + C_n^n x_n^n > C_n^2 x_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2} x_n^2$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$ şi $n \geq 2$), deducem că $x_n^2 < \dfrac{2}{n-1}$, de unde $0 < x_n < \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$ şi $n \geq 2$. Ţinând seama şi de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} = 0$, conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

50. ***Fie*** $a \in (-1,\ 1)$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = n\,a^n$**.** ***Folosind criteriul majorării, arătaţi că*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$**.**

Soluţie: Deoarece $|a| < 1$, există $b > 0$ astfel încât $|a| = \dfrac{1}{1+b}$, de unde $|a|^n = \dfrac{1}{(1+b)^n}$, ceea ce conduce la $|na^n| = \dfrac{n}{(1+b)^n}$. Remarcând că $(1+b)^n = 1 + C_n^1 b + C_n^2 b^2 + \ldots + C_n^n b^n > C_n^2 b^2 = \dfrac{n(n-1)}{2} b^2$ (oricare ar fi

$n \in \boldsymbol{N}$ şi $n \geq 2$), deducem că $|x_n| < \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{b^2}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$ şi $n \geq 2$. Având în vedere şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{b^2} \right) = 0$, conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

51. ***Fie*** $a > 0$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n \geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdot\ldots\cdot(1+a^n)}$. ***Calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluţie: Dacă $a \in (0,\ 1)$, atunci $0 < x_n < a^n$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, conform criteriului majorării, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dacă $a = 1$, atunci $x_n = \frac{1}{2^n}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Fie $a \in (1,\ \infty)$. În acest caz, $x_n < \frac{a^n}{a \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^n} = \frac{a^n}{a^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{n(n-1)}{2}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Având în vedere că, pentru $n \geq 3$, $\frac{n(n-1)}{2} \geq n$ şi, totodată, că $0 < \frac{1}{a} < 1$, deducem că $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^n$. Drept urmare, $0 < x_n < \left(\frac{1}{a}\right)^n$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$ şi $n \geq 3$. Evidenţiind şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$, conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, oricare ar fi $a \in (0,\ \infty)$.

52. ***Se consideră şirurile de numere reale strict pozitive*** $(x_n)_{n \geq 1}$ ***şi*** $(y_n)_{n \geq 1}$ ***cu proprietatea că*** $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$**,**

oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$**.** ***Arătaţi că:***

a) ***dacă*** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$**,** ***atunci*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$***;***

b) ***dacă*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$**,** ***atunci*** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$**.**

Soluţie: Se observă cu uşurinţă că $\frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \frac{x_4}{x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \frac{y_4}{y_3} \cdot \ldots \cdot \frac{y_n}{y_{n-1}}$, ceea ce conduce la $\frac{x_n}{x_1} \leq \frac{y_n}{y_1}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$.

a) Deoarece $0 < x_n \leq \frac{x_1}{y_1} \cdot y_n$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_1}{y_1} \cdot y_n \right) = 0$ (fiindcă $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$), rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

b) Remarcând că $y_n \geq \frac{y_1}{x_1} \cdot x_n$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{y_1}{x_1} \cdot x_n \right) = \infty$ (căci $\frac{y_1}{x_1} > 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$), deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

53. ***Se consideră şirurile*** $(a_n)_{n \geq 1}$ ***şi*** $(b_n)_{n \geq 1}$ ***satisfăcând condiţiile*** $a_n,\ b_n \in [0,\ 1]$**,** ***oricare ar fi*** $n \in \boldsymbol{N}^*$ ***şi*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 1$**.** ***Arătaţi că şirurile*** $(a_n)_{n \geq 1}$**,** $(b_n)_{n \geq 1}$ ***sunt convergente şi că*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$**.**

Soluţie: Deoarece $b_n \leq 1$ şi $a_n \geq 0$, rezultă că $a_n b_n \leq a_n$, ceea ce, împreună cu $a_n \leq 1$, conduce la $a_n b_n \leq a_n \leq 1$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$). Având în vedere şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Întrucât $a_n \leq 1$ şi $b_n \geq 0$, rezultă că $a_n b_n \leq b_n$, ceea ce, împreună cu $b_n \leq 1$, conduce la $a_n b_n \leq b_n \leq 1$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$). Remarcând şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$. Astfel cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

54. ***Dați un exemplu de șir convergent*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***astfel încât acesta să îndeplinească una din condițiile:***

a) $x_n \in \boldsymbol{Q}$ ***, oricare ar fi*** $n \in \boldsymbol{N}^*$ ***, iar*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$ ***;***

b) $x_n \in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$ ***, oricare ar fi*** $n \in \boldsymbol{N}^*$ ***, iar*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \boldsymbol{Q}$ **.**

Soluție: a) Să considerăm șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n = \dfrac{\left[n\sqrt{3}\right]}{n}$. Cum $\left[n\sqrt{3}\right] \in \boldsymbol{Z}$, iar $n \in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că $x_n \in \boldsymbol{Q}$. Având în vedere că $n\sqrt{3}-1 < \left[n\sqrt{3}\right] \leq n\sqrt{3}$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$), deducem că $\sqrt{3}-\dfrac{1}{n} < \dfrac{\left[n\sqrt{3}\right]}{n} \leq \sqrt{3}$, ceea ce este totuna cu $\sqrt{3}-\dfrac{1}{n} < x_n \leq \sqrt{3}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Remarcând şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3} = \sqrt{3}$, conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3} \in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$.

b) Să considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n = 1-\dfrac{\sqrt{2}}{n}$. Deoarece $\sqrt{2} \in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$, iar $n \in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că $\dfrac{\sqrt{2}}{n} \in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$, deci $x_n \in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$. Evidențiem şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \in \boldsymbol{Q}$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

55. ***Se consideră şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = \dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{4}{n^3+2}+\dfrac{9}{n^3+3}+\ldots+\dfrac{n^2}{n^3+n}$**.**

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$**.**

Soluție: Deoarece

$$x_n \geq \frac{1}{n^3+n}+\frac{4}{n^3+n}+\frac{9}{n^3+n}+\ldots+\frac{n^2}{n^3+n} = \frac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3+n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)} = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2+6}, \text{ iar}$$

$$x_n \leq \frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+1}+\frac{9}{n^3+1}+\ldots+\frac{n^2}{n^3+1} = \frac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)} = \frac{2n^2+n}{6n^2-6n+6}$$

(oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$), rezultă că $\dfrac{2n^2+3n+1}{6n^2+6} \leq x_n \leq \dfrac{2n^2+n}{6n^2-6n+6}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Având în vedere şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+1}{6n^2+6} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n}{6n^2-6n+6} = \dfrac{1}{3}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$.

56. ***Fie*** $a \in \boldsymbol{R}^*$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = \dfrac{[a]+[2a]+[3a]+\ldots+[na]}{n^2+1}$**.** ***Calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$**.**

Soluție: Deoarece $ka-1 < [ka] \leq ka$, oricare ar fi $k \in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că $[a]+[2a]+[3a]+\ldots+[na] > a-1+$ $+(2a-1)+(3a-1)+\ldots+(na-1) = \dfrac{n(n+1)a}{2}-n$ şi că $[a]+[2a]+[3a]+\ldots+[na] \leq a+2a++3a+\ldots+na =$ $= \dfrac{n(n+1)a}{2}$. Drept urmare, $\dfrac{n(n+1)a-2n}{2(n^2+1)} < \dfrac{[a]+[2a]+[3a]+\ldots+[na]}{n^2+1} \leq \dfrac{n(n+1)a}{2(n^2+1)}$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$), ceea ce este totuna cu $\dfrac{n(n+1)a-2n}{2(n^2+1)} < x_n \leq \dfrac{n(n+1)a}{2(n^2+1)}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Evidențiind şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)a-2n}{2(n^2+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+(a-2)n}{2n^2+2} = \dfrac{a}{2}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)a}{2(n^2+1)} = \dfrac{a}{2}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{a}{2}$.

57. ***Se consideră şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n = \dfrac{C_n^1}{1+2^n}+\dfrac{C_n^2}{2+2^n}+\ldots+\dfrac{C_n^n}{n+2^n}$**.** ***Calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$**.**

Soluție: Întrucât $x_n \geq \frac{C_n^1}{n+2^n}+\frac{C_n^2}{n+2^n}+...+\frac{C_n^n}{n+2^n}=\frac{C_n^1+C_n^2+...+C_n^n}{n+2^n}=\frac{2^n-1}{n+2^n}$, iar $x_n \leq \frac{C_n^1}{1+2^n}+\frac{C_n^2}{1+2^n}+...+\frac{C_n^n}{1+2^n}=\frac{C_n^1+C_n^2+...+C_n^n}{1+2^n}=\frac{2^n-1}{1+2^n}$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$), rezultă că $\frac{2^n-1}{n+2^n} \leq x_n \leq \frac{2^n-1}{1+2^n}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Remarcând și faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{n+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{n}{2^n}+1}=1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{1+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}=1$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

58. ***Se consideră șirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kC_n^k}{n2^n+k}$. ***Calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k=n2^{n-1}$. Deoarece $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kC_n^k}{n2^n+k} \geq \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kC_n^k}{n2^n+n}=\frac{1}{n2^n+n}\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k=$ $=\frac{n2^{n-1}}{n2^n+n}=\frac{2^{n-1}}{2^n+1}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kC_n^k}{n2^n+k} \leq \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kC_n^k}{n2^n+1}=\frac{1}{n2^n+1}\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k=\frac{n2^{n-1}}{n2^n+1}$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$), rezultă că $\frac{2^{n-1}}{2^n+1} \leq x_n \leq \frac{n2^{n-1}}{n2^n+1}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Ținând seama și de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}}{2^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n2^{n-1}}{n2^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n2^n}}=\frac{1}{2}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$.

59. ***Arătați că:***

a) ***șirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $x_n=\frac{3n+2}{2n}$ ***este strict descrescător;***

b) ***șirul*** $(y_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $y_n=\frac{2n-3}{3n}$ ***este strict crescător;***

c) ***șirul*** $(z_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $z_n=(-1)^n n$ ***nu este monoton.***

Soluție: a) Deoarece $x_{n+1}-x_n=\frac{3n+5}{2(n+1)}-\frac{3n+2}{2n}=\frac{n(3n+5)-(n+1)(3n+2)}{2n(n+1)}=-\frac{1}{n(n+1)}<0$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$), rezultă că $x_{n+1}<x_n$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, ceea ce înseamnă că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

b) Remarcând că $y_{n+1}-y_n=\frac{2n-1}{3(n+1)}-\frac{2n-3}{3n}=\frac{n(2n-1)-(n+1)(2n-3)}{3n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}>0$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$), deducem că $y_{n+1}>y_n$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Deci, șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

c) Întrucât $z_{2n-1}<0$ și $z_{2n}>0$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că șirul $(z_n)_{n\geq 1}$ nu este monoton.

60. ***Se consideră șirurile*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***și*** $(b_n)_{n\geq 1}$ ***definite prin*** $a_n=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}$, $b_n=a_n+\frac{1}{2n^2}$ ($n \in \boldsymbol{N}^*$). ***Arătați că*:**

a) ***șirul*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***este strict crescător*;**

b) ***șirul*** $(b_n)_{n\geq 1}$ ***este strict descrescător;***

c) ***şirul*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***este convergent.***

Soluție: a) Deoarece $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^3}>0$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) Remarcând că $b_{n+1}-b_n=a_{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}-a_n-\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{2(n+1)^2}-\frac{1}{2n^2}=\frac{n+3}{2(n+1)^3}-\frac{1}{2n^2}=$

$=\frac{(n+3)n^2-(n+1)^3}{2n^2(n+1)^3}=-\frac{3n+1}{2n^2(n+1)^3}<0$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, deducem că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

c) Se observă cu uşurință că $a_n\geq a_1$ şi $b_n\leq b_1$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Totodată, $a_n-b_n=\frac{1}{2n^2}>0$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Rezultă că $a_1\leq a_n<b_1$ (oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$), ceea ce arată că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Ținând seama şi de faptul că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, conchidem că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

61. ***Se consideră şirurile*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***şi*** $(b_n)_{n\geq 1}$ ***definite prin*** $a_n=\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$,

$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$. ***Arătați că aceste şiruri sunt convergente şi că*** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

Soluție: Întrucât $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{1}{(n+1)^2}>1$ şi $a_n>0$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că $a_{n+1}>a_n$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Deci, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Remarcând că $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\cdot\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2}=$

$=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\cdot\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^4-1}{(n+1)^4}=1-\frac{1}{(n+1)^4}<1$ şi $b_n>0$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, deducem că $b_{n+1}<b_n$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Prin urmare, şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Se observă cu uşurință că $a_n\geq a_1$ şi $b_n\leq b_1$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Totodată, $b_n-a_n=\frac{a_n}{n}>0$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Rezultă că $a_1\leq a_n<b_n\leq b_1$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, ceea ce arată că şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt mărginite. Ținând seama şi de faptul că aceste şiruri sunt strict monotone, conchidem că ele sunt convergente. Fie $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ şi $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. Deoarece $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, rezultă că $a=b$, ceea ce trebuia demonstrat.

62. ***Se consideră şirul*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***definit prin*** $a_1=1$ ***şi*** $a_{n+1}=a_n^2-a_n+2$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$. ***Calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Soluție: Întrucât $a_{n+1}-a_n=a_n^2-2a_n+2=(a_n-1)^2+1>0$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$, rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Să presupunem că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Atunci, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Fie $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ $(a\in \boldsymbol{R})$. Având în vedere că $a_{n+1}=a_n^2-a_n+2$ şi că $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$, deducem că $a=a^2-a+2$, de unde $a^2-2a+2=0$. Cum ultima egalitate nu poate avea loc în $\boldsymbol{R}$, presupunerea făcută este falsă. Deci, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit. Având în vedere că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi nemărginit, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

63. ***Se consideră şirul de numere reale nenule*** $(a_n)_{n\geq 0}$ ***definit prin*** $a_0 = 2$ ***şi*** $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ $(n \in \boldsymbol{N})$**.** ***Calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$**.**

Soluţie: Folosind inducţia matematică, demonstrăm că $a_n \geq 2$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$. Deoarece $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} > 0$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$, rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător. Să presupunem că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior. Atunci, şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $(a \in \boldsymbol{R})$. Remarcăm şi faptul că $a \geq 2$ (căci $a_n \geq 2$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$). Întrucât $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, rezultă că $a = a + \frac{1}{a}$, de unde $\frac{1}{a} = 0$. Având în vedere că ultima egalitate nu este posibilă, presupunerea făcută este falsă. Deci, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit superior. Cum şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este şi strict crescător, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Altfel: Deoarece $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, rezultă că $a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2 > a_n^2 + 2$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$. Prin urmare, $a_1^2 > a_0^2 + 2$, $a_2^2 > a_1^2 + 2$, ..., $a_n^2 > a_{n-1}^2 + 2$. Adunând ultimele n inegalităţi membru cu membru, obţinem $a_n^2 > a_0^2 + 2n$, de unde $a_n^2 \geq 2n + 4$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$. Ţinând seama şi de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n+4} = \infty$, conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

64. ***Fie şirul*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***având termenul general*** $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n n!}$**.** ***Arătaţi că şirul*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***este convergent şi, apoi, calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$**.**

Soluţie: Deoarece $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{3(n+1)} < 1$, iar $a_n > 0$, rezultă că $a_n > a_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, ceea ce arată că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Deducem că $a_n \leq a_1 = \frac{1}{3}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Deci, $0 < a_n \leq \frac{1}{3}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$ şi, deci, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Având în vedere că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi mărginit, conchidem că este şi convergent. Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Cum $a_{n+1} = \frac{2n+1}{3(n+1)} a_n$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3(n+1)} a_n \right)$, ceea ce conduce la $a = \frac{2a}{3}$, de unde $a = 0$. Drept urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

65. ***Fie*** $a \in [1, \infty)$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n\geq 0}$ ***definit prin*** $x_0 = a$ ***şi*** $x_{n+1}^2 \leq 2x_n - 1$**.** ***Arătaţi că şirul*** $(x_n)_{n\geq 0}$ ***este convergent şi, apoi, calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$**.**

Soluţie: Întrucât $2x_n - 1 \geq x_{n+1}^2$, iar $x_{n+1}^2 \geq 0$, rezultă că $x_n \geq \frac{1}{2}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$. Remarcând că $x_{n+1}^2 - x_n^2 \leq 2x_n - 1 - x_n^2 = -(x_n - 1)^2 \leq 0$, deducem că $(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) \leq 0$. Cum $x_{n+1} + x_n > 0$, rezultă că $x_{n+1} - x_n \leq 0$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$), ceea ce arată că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător. Totodată, $x_n \leq x_0 = a$. Deci, $\frac{1}{2} \leq x_n \leq a$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Fie $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ($x\in \boldsymbol{R}$). Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=x$. Ținând seama și de faptul că $x_{n+1}^2\le 2x_n-1$, deducem că $x^2\le 2x-1$, de unde $(x-1)^2\le 0$. Cum $(x-1)^2\ge 0$, rezultă că $x-1=0$, de unde $x=1$. Așadar, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

66. ***Se consideră șirul*** $(x_n)_{n\ge 1}$ ***definit prin*** $x_n\in(0,\ 1)$ ***și*** $4x_{n+1}(1-x_n)\ge 1$***, oricare ar fi*** $n\in \boldsymbol{N}^*$***. Arătați că șirul*** $(x_n)_{n\ge 1}$ ***este convergent și, apoi, calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$***.***

Soluție: Deoarece $x_n\in(0,\ 1)$ și $4x_{n+1}(1-x_n)\ge 1$, rezultă că $x_{n+1}\ge\dfrac{1}{4(1-x_n)}$, ceea ce implică $x_{n+1}-x_n\ge\dfrac{1}{4(1-x_n)}-x_n$, de unde $x_{n+1}-x_n\ge\dfrac{(2x_n-1)^2}{4(1-x_n)}\ge 0$ (oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$). Drept urmare, șirul $(x_n)_{n\ge 1}$ este descrescător. Remarcând și faptul că șirul $(x_n)_{n\ge 1}$ este și mărginit, deducem că acest șir este convergent. Fie $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ($a\in \boldsymbol{R}$). Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=a$. Cum $4x_{n+1}(1-x_n)\ge 1$, rezultă că $4a(1-a)\ge 1$, de unde $(2a-1)^2\le 0$. Totodată $(2a-1)^2\ge 0$ (căci $a\in \boldsymbol{R}$), deci $2a-1=0$, ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{2}$.

67. ***Se consideră șirul*** $(a_n)_{n\ge 0}$ ***definit prin*** $2\le a_0\le 3$ ***și*** $a_{n+1}=a_n^2-4a_n+6$ $(n\in \boldsymbol{N})$***. Arătați că șirul*** $(a_n)_{n\ge 0}$ ***este convergent și, apoi, calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$***.***

Soluție: Dacă $a_0=2$, atunci $a_n=2$ (oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}$). Deci, în acest caz, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$. Dacă $a_0=3$, se deduce imediat $a_n=3$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$. Fie $a_0\in(2,\ 3)$ și propoziția $P(n)$: $2<a_n<3$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}$. Deoarece $2<a_0<3$, rezultă că $P(0)$ este adevărată. Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $2<a_k<3$ $(k\in \boldsymbol{N})$. Având în vedere că $a_{k+1}-2=(a_k-2)^2>0$ și $a_{k+1}-3=a_k^2-4a_k+3=(a_k-1)(a_k-3)<0$, deducem că $2<a_{k+1}<3$, ceea ce arată că și $P(k+1)$ este adevărată. Deci, $P(n)$ este adevărată și, deci, șirul $(a_n)_{n\ge 0}$ este mărginit. Cum $a_{n+1}-a_n=a_n^2-5a_n+6=(a_n-2)(a_n-3)<0$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}$, rezultă că șirul $(a_n)_{n\ge 0}$ este strict descrescător. Ca urmare a celor stabilite anterior, șirul $(a_n)_{n\ge 0}$ este convergent. Fie $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ($a\in \boldsymbol{R}$). Remarcând că $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=a$, iar $a_{n+1}=a_n^2-4a_n+6$, deducem că $a=a^2-4a+6$, ceea ce conduce la $a^2-5a+6=0$, de unde $a=2$ sau $a=3$. Ținând seama și de faptul că $2<a_n<3$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}$, iar șirul $(a_n)_{n\ge 0}$ este strict descrescător, conchidem că $a=2$. Drept urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$.

68. ***Se consideră șirul*** $(a_n)_{n\ge 1}$ ***definit prin*** $a_1=\sqrt{2}$ ***și*** $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ $(n\in \boldsymbol{N}^*)$***. Arătați că șirul*** $(a_n)_{n\ge 1}$ ***este convergent și, apoi, calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$***.***

Soluție: Fie $P(n)$ propoziția: $a_n<a_{n+1}$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Întrucât $\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}$, rezultă că $a_1<a_2$, ceea ce arată că $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $a_k<a_{k+1}$ $(k\in \boldsymbol{N}^*)$. Având în vedere că $a_{k+2}^2-a_{k+1}^2=2-a_{k+1}-(2-a_k)=a_{k+1}-a_k>0$, deducem că $a_{k+2}^2>a_{k+1}^2$, de unde $a_{k+2}>a_{k+1}$ (căci $a_n>0$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$). Deci, și $P(k+1)$ este adevărată. Rezultă că $P(n)$ este adevărată, ceea ce este totuna cu faptul că șirul $(a_n)_{n\ge 1}$ este strict crescător. Prin urmare, $a_n\ge a_1=\sqrt{2}$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Remarcând că $a_n^2=2+a_{n-1}$, iar $a_{n-1}<a_n$, deducem că $a_n^2<2+a_n$, de unde $a_n^2-a_n-2<0$, ceea ce, împreună cu $a_n\ge\sqrt{2}$, conduce la $\sqrt{2}\le a_n<2$, oricare ar fi $n\in \boldsymbol{N}^*$. Ca urmare a celor stabilite anterior, șirul $(a_n)_{n\ge 1}$ este convergent. Fie $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ($a\in \boldsymbol{R}$). Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=a$. Cum

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (2+a_n)$ (fiindcă $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$), rezultă că $a^2 = 2 + a$, de unde $a = -1$ sau $a = 2$. Remarcând că $a \geq \sqrt{2}$ (căci $a_n \geq \sqrt{2}$), conchidem că $a = 2$. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

69. ***Se consideră şirul*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***definit prin*** $a_1 = 1$ ***şi*** $a_{n+1} = \dfrac{4-a_n}{3-a_n}$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$**.**

a) ***Arătaţi că*** $a_n < 2$**,** ***oricare ar fi*** $n \in \boldsymbol{N}^*$**.**

b) ***Demonstraţi că şirul*** $(a_n)_{n\geq 1}$ ***este convergent şi, apoi, calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$**.**

Soluţie: a) Fie $P(n)$ propoziţia: $a_n < 2$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Deoarece $a_1 = 1 < 2$, rezultă că $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică $a_k < 2$ $(k \in \boldsymbol{N}^*)$. Cum $a_{k+1} - 2 = \dfrac{4-a_k}{3-a_k} - 2 = \dfrac{a_k - 2}{3-a_k} < 0$, rezultă că $a_{k+1} < 2$, ceea ce arată că şi $P(k+1)$ este adevărată. Deci, $P(n)$ este adevărată.

b) Având în vedere că $a_{n+1} - a_n = \dfrac{4-a_n}{3-a_n} - a_n = \dfrac{(a_n-2)^2}{3-a_n} > 0$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$), deducem că $a_{n+1} > a_n$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Deci, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Rezultă că $a_n \geq a_1 = 1$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. În baza celor stabilite anterior, conchidem că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ($a \in \boldsymbol{R}$). Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Remarcând că $a_n \leq 2$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq 2$, ceea ce implică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 3$. Ţinând seama atât de aceste rezultate, cât şi de faptul că $a_{n+1} = \dfrac{4-a_n}{3-a_n}$, conchidem că $a = \dfrac{4-a}{3-a}$, de unde $a = 2$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

70. ***Fie*** $a \in [1, \infty)$ ***şi şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***definit prin*** $x_1 = a$ ***şi*** $x_{n+1} = x_n + x_n^2$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$**.**

a) ***Arătaţi că*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$**.**

b) ***Calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+x_k}$**.**

Soluţie: a) Având în vedere că $x_{n+1} - x_n = x_n^2 \geq 0$, rezultă că $x_{n+1} \geq x_n$ (oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$), ceea ce arată că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător. Rezultă că $x_n \geq x_1 = a$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Să presupunem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Atunci, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ($x \in \boldsymbol{R}$). Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$. Ţinând seama şi de faptul că $x_{n+1} = x_n + x_n^2$, deducem că $x = x + x^2$, de unde $x = 0$. Totodată, $x \geq 1$ (căci $x_n \geq 1$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$). Contradicţia la care s-a ajuns arată că presupunerea făcută este falsă. Deci, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este mărginit superior. Remarcând şi faptul că şirul este crescător, conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

b) Deoarece $x_k(1+x_k) = x_{k+1}$, iar $x_k \neq 0$ (oricare ar fi $k \in \boldsymbol{N}^*$), rezultă că $\dfrac{1}{x_k(1+x_k)} = \dfrac{1}{x_{k+1}}$, ceea ce conduce la $\dfrac{1}{x_k} - \dfrac{1}{1+x_k} = \dfrac{1}{x_{k+1}}$, de unde $\dfrac{1}{1+x_k} = \dfrac{1}{x_k} - \dfrac{1}{x_{k+1}}$. Drept urmare, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+x_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{x_k} - \dfrac{1}{x_{k+1}}\right) =$

$= \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{x_{n+1}}$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+x_k} = \dfrac{1}{a}$ (căci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ implică $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \infty$).

Probleme propuse

1. Pentru fiecare dintre următoarele şiruri, scrieți primii cinci termeni ai şirului, ştiind că termenul general al şirului este:

a) $a_n = 3n-1 \quad (n \in \boldsymbol{N})$; **b)** $a_n = 2^n - n^2 \quad (n \in \boldsymbol{N}^*)$; **c)** $a_n = \cos\frac{n\pi}{4} \quad (n \in \boldsymbol{N})$;

d) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \quad (n \in \boldsymbol{N}^*)$; **e)** $a_n = \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{n!} \quad (n \in \boldsymbol{N}^*)$; **f)** $a_n = \frac{n^2 - n}{n!} \quad (n \in \boldsymbol{N}^*)$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = 3^{n-1} + (-1)^n 2^n$. Arătați că $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$.

3. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ având termenul general $a_n = \frac{2n+5}{n+1}$ şi intervalul $V = \left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ o vecinătate a lui 2. Câți termeni ai şirului se află în afara lui V?

4. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ având termenul general $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$ şi intervalul $V = \left(\frac{7}{12},\ \frac{11}{12}\right)$ o vecinătate a lui $\frac{2}{3}$.

a) Câți termeni ai şirului se află în afara lui V?

b) Găsiți o vecinătate V' a lui $\frac{2}{3}$, astfel încât în afara lui V' să se afle exact 20 de termeni ai şirului $(a_n)_{n \geq 0}$.

5. Fie şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \frac{n}{2n+1}$ şi intervalul $V = (0,\ 2)$ o vecinătate a lui 1. Arătați că, deşi, $a_n \in V$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$, totuşi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 1$.

6. Arătați că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = (-1)^n$ este divergent.

7. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{2n+1}$. Arătați că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este divergent.

8. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \sin\frac{n\pi}{4}$. Arătați că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este divergent.

9. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \frac{n + (-1)^n}{2n+1}$. Arătați că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

10. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \frac{2 + (-1)^n n}{3 + (-1)^{n+1} n}$. Arătați că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

11. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ şi $(y_n)_{n \geq 1}$ două şiruri convergente. Se consideră şirul $(z_n)_{n \geq 1}$ definit prin $z_{2n-1} = x_n$ şi $z_{2n} = y_n \quad (n \in \boldsymbol{N}^*)$. Este şirul $(z_n)_{n \geq 1}$ convergent?

12. Dați un exemplu de șir care să aibă două subșiruri astfel încât unul să fie convergent, iar celălalt să fie divergent.

13. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât șirul $(x_n^2)_{n\geq 1}$ să fie convergent. Ce se poate spune despre convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$?

14. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ astfel încât șirurile $(a_n+b_n)_{n\geq 1}$ și $(a_n-b_n)_{n\geq 1}$ să fie convergente. Arătați că șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente.

15. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale nenule. Arătați că, dacă șirurile $(x_n^2)_{n\geq 1}$ și $(x_n^4-x_n^3)_{n\geq 1}$ sunt convergente, atunci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

16. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât subșirurile $(a_{2n})_{n\geq 1}$, $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ și $(a_{5n})_{n\geq 1}$ să fie convergente. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

17. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$. Dacă aceste șiruri sunt divergente, șirul $(a_n-b_n)_{n\geq 1}$ este divergent?

18. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că șirurile $(a_n-b_n)_{n\geq 1}$, $(a_nb_n)_{n\geq 1}$ și $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ sunt convergente. Ce se poate spune despre convergența șirurilor $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$?

19. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$. Ce se poate spune despre convergența șirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

20. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $a_n=3n-2-(n-1)\cdot\frac{3n+1}{n+2}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2}=3$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[3n-2-3(n-1)\right]=1$. Remarcând că $a_n=\frac{6n-3}{n+2}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=6$. Unde este greșeala?

21. Calculați limita șirului cu termenul general a_n în fiecare dintre situațiile:

a) $a_n=2^n+3^n-5^n$; **b)** $a_n=\frac{4^n-3^n}{4^n+3^n}$; **c)** $a_n=\frac{10^{n+1}}{(2^n+1)(5^n+1)}$;

d) $a_n=\frac{3^n-4^n+2\cdot 5^n}{3^n+4\cdot 5^n}$; **e)** $a_n=\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ $(x>0)$.

22. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $a_n=\frac{3-2}{5}+\frac{3^2-2^2}{5^2}+\ldots+\frac{3^n-2^n}{5^n}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

23. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $a_n=\sqrt{3}\cdot\sqrt[2^2]{3}\cdot\sqrt[2^3]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{3}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

24. Fie $a\in\boldsymbol{R}$ și șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+a^n}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

25. Fie $a,\ b\in(0,\ \infty)$ și $(x_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n=\frac{a^n-2b^n}{3a^n+b^n}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

26. Fie $a\geq 0$ și șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n=\frac{3^n}{a^n+3^n}-\frac{2^n}{a^n+2^n}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

27. Fie $a \in \boldsymbol{R}$ şi şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $x_n = \dfrac{a^n - 2^n}{3^n + 5^n}$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

28. Se consideră şirurile $(a_n)_{n \geq 0}$ şi $(b_n)_{n \geq 0}$ definite prin $a_0 = 2$, $a_n = \dfrac{1}{2} a_{n-1} - 2$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$ şi $b_n = a_n + 4$ $(n \in \boldsymbol{N})$. Arătaţi că şirul $(b_n)_{n \geq 0}$ este o progresie geometrică şi, apoi, calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

29. Se consideră şirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ şi $(b_n)_{n \geq 1}$ definite prin $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{4a_n + 2}{a_n + 5}$, $b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 2}$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

Arătaţi că şirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică şi, apoi, calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

30. Fie $x_k = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{2^k + 1} + \dfrac{1}{(2^k + 1)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(2^k + 1)^n} \right)$ $(k \in \boldsymbol{N}^*)$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n \right)$.

31. Fie $a \in \boldsymbol{R}$ şi şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $x_n = a^{n+1} + 3a^n - 2a + 1$. Determinaţi în funcţie de valorile lui a, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

32. Fie $a \in \boldsymbol{R}$ şi şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $x_n = a^{n+2} - 9a^n + 1$. Determinaţi în funcţie de valorile lui a, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

33. Fie $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{2\}$ şi şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $x_n = \dfrac{a^{n+1} + 2a^n - 1}{2 - a}$. Determinaţi în funcţie de valorile lui a, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

34. Calculaţi limita şirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situaţii:

a) $a_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{4n^2 + n + 2}$; **b)** $a_n = \dfrac{n^3 - 5n^2 + 1}{n^2 - n + 1}$; **c)** $a_n = \dfrac{3n^5 + n^2 + 2}{-n^3 + n^2 + 1}$; **d)** $a_n = \dfrac{n^3 - n^2 + n + 1}{2n^4 + n^2 + 1}$.

35. Calculaţi limita şirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situaţii:

a) $a_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{n} - \dfrac{n(2n-1)}{n+1}$; **b)** $a_n = \dfrac{3n^2 - n - 1}{2n - 1} - \dfrac{3n^2 - 1}{2n + 1}$; **c)** $a_n = \dfrac{n^2 + 3}{n + 2} - \dfrac{n^2 + 2}{n + 1}$;

d) $a_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{2n + 1} - \dfrac{n^2 + 1}{n - 1}$.

36. Calculaţi limita şirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situaţii:

a) $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{(n+1)^3}$; **b)** $a_n = \dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{(n^2 + 1)(n^2 - n + 1)}$; **c)** $a_n = \dfrac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2}{2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2}$;

d) $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + n(n+2)}{n+1} - \dfrac{n(n+2)}{3}$.

37. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \dfrac{(n+1)^2}{n} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2 + k + 1}{k(k+1)}$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

38. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \dfrac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} (n^2 - 2k^2)$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

39. Fie $a \in \boldsymbol{R}$ şi şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $x_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (k^2 - k + 1)}{n^a}$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

40. Fie $a,\ b\in \boldsymbol{R}$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 3}$ având termenul general $x_n=\dfrac{3n^2+an+1}{n-2}-\dfrac{bn^2-n}{n+1}$. Determinaţi a şi b, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

41. Fie $a,\ b\in \boldsymbol{R}$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n=\dfrac{4n^2+3n+1}{2n-1}+an+b$. Determinaţi a şi b, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{3}{2}$.

42. Calculaţi limita şirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situaţii:

a) $a_n=\sqrt{2n^2+1}-n$; **b)** $a_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{3n-1}$; **c)** $a_n=\sqrt{n^4+n^2+1}-3n^2+1$;

d) $a_n=\sqrt[3]{n^3+n+2}-3n$; **e)** $a_n=\sqrt[3]{n^2-n+2}-\sqrt[3]{n+1}$.

43. Calculaţi limita şirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situaţii:

a) $a_n=\sqrt{4n^2+n+1}-2n$; **b)** $a_n=n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}\right)$; **c)** $a_n=n^2\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}-\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\right)$;

d) $a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$; **e)** $a_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}+2\sqrt{n+1}-3\sqrt{n-1}\right)$.

44. Calculaţi limita şirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situaţii:

a) $a_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n}}\right)$; **b)** $a_n=\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n+1}}$; **c)** $a_n=n\left(\sqrt{\dfrac{2n+1}{2n+3}}-1\right)$;

d) $a_n=n\left(\sqrt{n+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n+\sqrt{n-1}}\right)$; **e)** $a_n=\sqrt[3]{n^3+3n}-n$; **f)** $a_n=\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt{n^2+n}$.

45. Fie $a\in \boldsymbol{R}$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n=n^a\cdot\dfrac{\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

46. Fie $a\in \boldsymbol{R}$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n=n^a\cdot\left(\dfrac{n+3}{n+4}-\dfrac{n+4}{n+3}\right)\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}-\sqrt{\dfrac{n+2}{n+3}}\right)$. Determinaţi valorile lui a pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ este finită.

47. Fie $a,\ b\in \boldsymbol{R}$ ($a>0$) şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n=\sqrt{an^2+4n-3}+bn$. Determinaţi a şi b, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

48. Fie $a,\ b,\ c\in \boldsymbol{R}$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n=n\left(\sqrt{n^2+an+b}+cn\right)$. Determinaţi $a,\ b$ şi c, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

49. Fie $a,\ b,\ c\in \boldsymbol{R}$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $x_n=a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}+c\sqrt{n+3}$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

50. Calculaţi limita şirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situaţii:

a) $a_n=\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^n$; **b)** $a_n=\left(\sqrt[3]{\dfrac{n-5}{n+1}}\right)^n$; **c)** $a_n=\left(\dfrac{2^n-1}{2^n+1}\right)^{3^n}$;

d) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)^n$; **e)** $a_n = \left(\sqrt{n^2+2n} - n \right)^n$.

51. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... + \dfrac{1}{2^n} \right)^{3^n}$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

52. Fie $a \in \boldsymbol{N}^*$ (fixat) şi şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $x_n = \left[\dfrac{(n+a)!}{n^a \, n!} \right]^n$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

53. Fie $a \in (0, \infty)$ şi şirul $(x_n)_{n \geq 2}$ având termenul general $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{4^2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} (a \, x_n)^n$.

54. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \dfrac{2^n + (-2)^n}{3^n}$. Folosind criteriul majorării, arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

55. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$. Folosind criteriul majorării, arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

56. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = n^2 \sin \dfrac{\pi}{2^n}$. Folosind criteriul majorării, arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

57. Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termenii strict pozitivi şi satisfăcând condiţia $3x_{n+1} < 2x_n$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$. Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

58. Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n^2} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$.

59. Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 2}$ având termenul general $x_n = \sqrt[n^2]{n!}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$.

60. Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$.

61. Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $x_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + ... + \dfrac{n}{n^2+n}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

62. Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2+k}{n^3+k}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \dfrac{1}{3}$.

63. Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $x_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+k}}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$.

Indicaţie: $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+k} \leq \sqrt[n]{2n}$.

64. Fie $a,\ b \in (0,\ \infty)$ şi şirul $(x_n)_{n \geq 2}$ având termenul general $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

65. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ având termenul general $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+1}$ este strict monoton şi mărginit.

66. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ este strict monoton şi mărginit.

67. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ este strict monoton şi mărginit.

68. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 = 1$ şi $a_{n+1} = 1 + a_n^2$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$.

69. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ având termenul general $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$.

70. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2}$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent şi, apoi, calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

71. Se consideră şirul de numere reale pozitive $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 2$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent şi, apoi, calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

72. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 = 2$ şi $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$ $(n \in \boldsymbol{N})$.

a) Arătaţi că $a_n \geq \sqrt{2}$ oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$.

b) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent şi, apoi, calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

73. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 \geq 1$ şi $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 1}$ $(n \in \boldsymbol{N})$.

a) Arătaţi că $a_n \geq 1$ oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$.

b) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent şi, apoi, calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

74. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 2$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{a_n + 1}$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

a) Arătaţi că $a_n > 1$ oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$.

b) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent şi, apoi, calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

75. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 0$ şi $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n^2 + 1\right)$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent şi, apoi, calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

76. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 > 0$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1 + a_n^2}}$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \sqrt{n}$.

Răspunsuri

3. 6 **4. a)** 9; **b)** $V'=\left(\frac{37}{59},\ 1\right)$ **11.** da, numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ **13.** nu se poate spune nimic **17.** şirul $(a_n-b_n)_{n\geq 1}$ poate fi divergent sau poate fi convergent **18.** nu se poate spune nimic **19.** nu se poate spune nimic **20.** când s-a obţinut $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ **21. a)** $-\infty$; **b)** 1; **c)** 10; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** -1 dacă $x\in(0,\ 1)$; 0 dacă $x=1$ şi 1 dacă $x\in(1,\ \infty)$ **22.** $\frac{5}{6}$ **23.** 3 **24.** $\frac{1}{2}$ dacă $|a|<2$; 0 dacă $|a|>2$; $\frac{1}{3}$ dacă $a=2$; nu există dacă $a=-2$ **25.** -2 dacă $a<b$; $\frac{1}{3}$ dacă $a>b$ şi $-\frac{1}{4}$ dacă $a=b$ **26.** 0 dacă $a\in[0,\ 2)$; $\frac{1}{2}$ dacă $a\in\{2,\ 3\}$; 1 dacă $a\in(2,\ 3)$ şi 0 dacă $a\in(3,\ \infty)$ **27.** nu există dacă $a\in(-\infty,\ -5]$; 0 dacă $a\in(-5,\ 5)$; 1 dacă $a=5$ şi ∞ dacă $a\in(5,\ \infty)$ **28.** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-4$ **29.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, **30.** 1 **31.** nu există dacă $a\in(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ -1]$; 7 dacă $a=-3$; $1-2a$ dacă $a\in(-1,\ 1)$; 3 dacă $a=1$ şi ∞ dacă $a\in(1,\ \infty)$ **32.** nu există dacă $a\in(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ -1]$; 1 dacă $a\in(-1,\ 1)\cup\{-3,\ 3\}$; -7 dacă $a=1$; $-\infty$ dacă $a\in(1,\ 3)$; ∞ dacă $a\in(3,\ \infty)$ **33.** nu există dacă $a\in(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ -1]$; $-\frac{1}{4}$ dacă $a=-2$; $\frac{1}{a-2}$ dacă $a\in(-1,\ 1)$; 2 dacă $a=1$; ∞ dacă $a\in(1,\ 2)$; $-\infty$ dacă $a\in(2,\ \infty)$ **34. a)** $\frac{1}{2}$; **b)** ∞; **c)** $-\infty$; **d)** 0 **35. a)** 6; **b)** 1; **c)** -1; **d)** $-\infty$ **36. a)** $\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{1}{4}$; **c)** 1; **d)** ∞ **37.** 1 **38.** $\frac{1}{3}$ **39.** ∞ dacă $a<3$; $\frac{1}{3}$ dacă $a=3$; 0 dacă $a>3$ **40.** $a=-9$ şi $b=3$ **41.** $a=-2$ şi $b=-1$ **42. a)** ∞; **b)** $-\infty$; **c)** $-\infty$; **d)** $-\infty$; **e)** ∞ **43. a)** $\frac{1}{4}$; **b)** $\frac{3}{2}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** 0; **e)** 4 **44. a)** 1; **b)** $\sqrt{2}$; **c)** $-\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** 1; **f)** $-\frac{1}{2}$ **45.** 0 dacă $a<\frac{1}{6}$; $\frac{4}{9}$ dacă $a=\frac{1}{6}$; ∞ dacă $a>\frac{1}{6}$ **46.** $a\leq 3$ **47.** $a=4$ şi $b=-2$ **48.** $a=0$, $b=2$ şi $c=-1$ **49.** $-\infty$ dacă $a+b+c<0$; 0 dacă $a+b+c=0$; ∞ dacă $a+b+c>0$ **50. a)** e; **b)** e^{-2}; **c)** 0; **d)** $e^{-\frac{3}{2}}$; **e)** $\frac{1}{\sqrt{e}}$ **51.** 0 **52.** $e^{\frac{a(a+1)}{2}}$ **53.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$. Pentru $\lim\limits_{n\to\infty}(a\,x_n)^n$: 0 dacă $a\in(0,\ 2)$; e dacă $a=2$; ∞ dacă $a\in(2,\ \infty)$ **64.** b dacă $a<b$; a dacă $a\geq b$ **70.** 0 **71.** 4 **72.** $\sqrt{2}$ **73.** 1 **74.** 4 **75.** 1 **76.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\sqrt{n}=1$.

CAPITOLUL VII

LIMITE DE FUNCȚII. ASIMPTOTE

§ 1. Limite de funcții

Probleme rezolvate

1. ***Arătați că, deşi, funcțiile*** $f,\ g:(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-1},\ g(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$ ***nu au limită în*** $x=1$, ***totuşi funcțiile*** $f+g,\ fg$ ***şi*** $\dfrac{f}{g}$ ***au limită în*** $x=1$.

Soluție: Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)=\infty$, rezultă că funcțiile f şi g nu au limită în $x=1$.

Remarcând că $\lim\limits_{x\to 1}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x^2-1)}{x-1}=3\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=6$, $\lim\limits_{x\to 1}(fg)(x)=$ $=\lim\limits_{x\to 1}\big(f(x)g(x)\big)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2(x^2-3)}{(x-1)^2}=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3}{2x^2}=-1$, deducem că fiecare dintre funcțiile $f+g,\ fg$ şi $\dfrac{f}{g}$ are limită în $x=1$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

2. ***Pentru fiecare dintre următoarele funcții, calculați limitele laterale în punctele indicate în dreptul ei*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ ***în*** $x=-1$ ***şi în*** $x=1$;

b) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{0,\ 2\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-2)}$ ***în*** $x=0$ ***şi în*** $x=2$;

c) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sin^3 x}$ ***în*** $x=0$ ***şi în*** $x=\pi$;

d) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{1}{1-\cos x}$ ***în*** $x=2\pi$.

Soluție: a) Deoarece $x^2-1>0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)$, iar $x^2-1<0$, oricare ar fi $x\in(-1,\ 1)$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\infty$.

b) Remarcând că $x^2(x-2)\le 0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ 2)$, iar $x^2(x-2)>0$, oricare ar fi $x\in(2,\ \infty)$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\infty$.

c) Întrucât $\sin x<0$, oricare ar fi $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)\cup\left(\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$, iar $\sin x>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \pi)$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} f(x)=\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x>\pi}} f(x)=-\infty$.

d) Evidențiind faptul că $1-\cos x\ge 0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\pi\\ x<2\pi}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\pi\\ x>2\pi}} f(x)=\infty$.

3. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1,\ 2\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-1}}-2}$***. Calculați limitele laterale ale lui*** f ***în*** $x=1$ ***și în*** $x=2$.

Soluție: Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}2^{\frac{1}{x-1}}=0$, de unde $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=-\dfrac{1}{2}$. Din faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{1}{x-1}=\infty$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}2^{\frac{1}{x-1}}=\infty$, ceea ce implică $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=0$. Pentru a calcula $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}f(x)$, putem considera că $1<x<2$. Atunci, $0<x-1<1$, de unde $\dfrac{1}{x-1}>1$, ceea ce implică $2^{\frac{1}{x-1}}-2>0$. Remarcând și faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(2^{\frac{1}{x-1}}-2\right)=0$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}f(x)=\infty$. Analog, arătăm că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)=-\infty$.

4. ***Pentru fiecare dintre următoarele funcții, calculați limita în punctul indicat în dreptul ei*****:**

a) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ ***în*** $x=1$**;**

b) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{2\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x}{|x-2|}$ ***în*** $x=2$**;**

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in(-\infty,\ 1)\\ 2x-3, & x\in[1,\ \infty)\end{cases}$ ***în*** $x=1$**;**

d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in(-\infty,\ 2]\\ 3x-5, & x\in(2,\ \infty)\end{cases}$ ***în*** $x=2$**;**

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ \sqrt{3x+1}, & x\ge 1\end{cases}$ ***în*** $x=1$**;**

f) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 0\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0\end{cases}$ ***în*** $x=0$**;**

g) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}2x^2+x, & x\le 0\\ x\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ ***în*** $x=0$**;**

h) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^3}, & x<1\\ \ln(x^2-1), & x>1\end{cases}$ ***în*** $x=1$**.**

Soluție: a) Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\infty$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$.

b) Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)=\infty$, deducem că $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$.

c) Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x+1)=2$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(2x-3)=-1$, rezultă că nu există $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

d) Evidențiind faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x-1)=1$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(3x-5)=1$, deducem că $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$.

e) Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x+1)=2$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt{3x+1}=2$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

f) Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (2x-1)=-1$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin x}{x}=1$, rezultă că nu există $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

g) Evident, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (2x^2+x)=0$. Deoarece, pentru $x\in(0,\ \infty)$, $|f(x)|=\left|x\cos\dfrac{1}{x}\right|=$

$=|x|\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\le |x|=x$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x=0$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$. Deci, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

h) Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{(x-1)^3}=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln(x^2-1)=-\infty$, deducem că $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$.

5. ***Determinaţi*** $a\in \boldsymbol{R}$ ***, astfel încât fiecare dintre următoarele funcţii să aibă limită finită în punctul indicat în dreptul ei*****:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}2ax & ,\ x\in(-\infty,\ 1)\\ 3x^2-a^2x & ,\ x\in[1,\ \infty)\end{cases}$ ***în*** $x=1$**;**

b) $f:\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{R},\ f(x)=1+a\ \text{arctg}\ \dfrac{1}{x}$ ***în*** $x=0$**;**

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^{a\,x}(2+\cos x)$ ***în*** $x=\infty$**.**

Soluţie: a) Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 2ax=2a$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(3x^2-a^2x\right)=3-a^2$, funcţia f are limită în $x=1$ dacă şi numai dacă $2a=3-a^2$, de unde $a=-3$ sau $a=1$.

b) Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(1+a\ \text{arctg}\ \dfrac{1}{x}\right)=1-a\cdot\dfrac{\pi}{2}$ (căci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x}=-\infty$), iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1+a\cdot\dfrac{\pi}{2}$, deducem că funcţia f are limită în $x=0$ dacă şi numai dacă $1-a\cdot\dfrac{\pi}{2}=1+a\cdot\dfrac{\pi}{2}$, de unde $a=0$.

c) Fie $a<0$. Atunci, $|f(x)|=e^{a\,x}(2+\cos x)\le 3e^{a\,x}$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} e^{a\,x}=0$ (căci $a<0\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} a\,x=-\infty$), rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Dacă $a=0$, atunci $f(x)=2+\cos x$. Deci, în acest caz, f nu are limită în $x=\infty$ (fiindcă $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ nu există). Fie $a>0$. Având în vedere că $f(x)\ge e^{a\,x}$ (căci $\cos x\ge -1\Rightarrow 2+\cos x\ge 1$, iar $e^{a\,x}>0$) şi că $\lim\limits_{x\to\infty} e^{ax}=\infty$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Drept urmare, orice $a<0$ este soluţie a problemei.

6. ***Determinaţi*** $a,\ b\in \boldsymbol{R}$ ***, astfel încât fiecare dintre următoarele funcţii să aibă limită în punctul indicat în dreptul ei*****:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+a}{x-1} & ,\ x\in(-\infty,\ 1)\\ bx^2 & ,\ x\in[1,\ \infty)\end{cases}$ ***în*** $x=1$**;**

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+a & ,\ x\in(-\infty,\ 1]\\ x^2+2x+b\ln(x^2-1) & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$ ***în*** $x=1$**.**

Soluţie: a) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} bx^2=b$. Evident, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x^2+a)=a+1$. Dacă $a+1<0$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2+a}{x-1}=\infty$ (căci $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{x-1}=-\infty$), iar dacă $a+1>0$, atunci

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2+a}{x-1}=-\infty$. Deci, pentru a avea îndeplinită condiția din enunț, este necesar ca $a+1=0$, de unde $a=-1$. În acest caz, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x+1)=2$. Cum f are limită în $x=1$ dacă și numai dacă $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$, rezultă că $b=2$. Prin urmare, $a=-1$ și $b=2$.

b) Evidențiem, mai întâi, faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (2x+a)=a+2$. Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln(x^2-1)=-\infty$, rezultă că, dacă $b<0$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(x^2+2x+b\ln(x^2-1)\right)=\infty$, iar dacă $b>0$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\infty$. Deci, pentru a putea îndeplini condiția din enunț, este necesar ca $b=0$. În acest caz, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=3$. Rezultă că $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ există numai dacă $a+2=3$. Deci, $a=1$ și $b=0$.

7. ***Arătați că nici una dintre următoarele funcții nu are limită în punctul indicat în dreptul fiecăreia*:**

a) $f:\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ ***în*** $x=0$**;** **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=2\sin x-4\cos x$ ***în*** $x=\infty$**;**

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=2x-[2x]$ ***în*** $x=\infty$**.**

Soluție: a) Să considerăm șirul $(x_n)_{n\ge 1}$, unde $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$. Evident, $x_n\neq 0$ și $x_n\to 0$. Cum $f(x_n)=\cos 2n\pi=1$, rezultă că $f(x_n)\to 1$. Fie șirul $(x'_n)_{n\ge 1}$, unde $x'_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}$. Evident, $x'_n\neq 0$ și $x'_n\to 0$. Remarcând că $f(x'_n)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=0$, deducem că $f(x'_n)\to 0$. Întrucât cele două șiruri de valori ale funcției f converg la limite diferite, rezultă că f nu are limită în $x=0$.

b) Să considerăm șirul $(x_n)_{n\ge 1}$, unde $x_n=2n\pi$. Evident, $x_n\to\infty$. Deoarece $f(x_n)=2\sin 2n\pi-4\cos 2n\pi=-4$, rezultă că $f(x_n)\to -4$. Fie șirul $(x'_n)_{n\ge 1}$, unde $x'_n=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$. Evident, $x'_n\to\infty$. Remarcând că $f(x'_n)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)-4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=2$, deducem că $f(x'_n)\to 2$. Ținând seama de faptul că cele două șiruri de valori ale funcției f converg la limite diferite, conchidem că f nu are limită în $x=\infty$.

c) Să considerăm șirurile $(x_n)_{n\ge 0}$ și $(x'_n)_{n\ge 0}$, unde $x_n=n+\dfrac{1}{4}$ și $x'_n=n+\dfrac{1}{6}$. Evident, $x_n\to\infty$ și $x'_n\to\infty$. Având în vedere că $f(x_n)=2n+\dfrac{1}{2}-\left[2n+\dfrac{1}{2}\right]=2n+\dfrac{1}{2}-2n-\left[\dfrac{1}{2}\right]=\dfrac{1}{2}$, iar $f(x'_n)=2n+\dfrac{1}{3}-\left[2n+\dfrac{1}{3}\right]=\dfrac{1}{3}$, deducem că $f(x_n)\to\dfrac{1}{2}$, iar $f(x'_n)\to\dfrac{1}{3}$. Deci, f nu are limită în $x=\infty$.

8. ***Arătați că orice funcție*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ***periodică și neconstantă nu are limită nici la*** ∞ ***și nici la*** $-\infty$**.**

Soluție: Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ astfel încât $f(a)\neq f(b)$ și $T>0$ o perioadă a funcției f. Să considerăm șirurile $(x_n)_{n\ge 1}$ și $(x'_n)_{n\ge 1}$, unde $x_n=a+nT$ și $x'_n=b+nT$. Evident, $x_n\to\infty$ și $x'_n\to\infty$. Deoarece $f(x_n)=f(a+nT)=f(a)$, iar $f(x'_n)=f(b+nT)=f(b)$, rezultă că $f(x_n)\to f(a)$, iar $f(x'_n)\to f(b)$. Cum $f(a)\neq f(b)$, rezultă că funcția f nu are limită la ∞. Analog, arătăm că funcția f nu are limită și la $-\infty$.

9. ***Arătați că funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}3-2x, & x\in\boldsymbol{Q}\\ x, & x\in\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}\end{cases}$ ***are limită doar în*** $x=1$ ***și că*** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$**.**

Soluție: Fie x_0 un punct oarecare din $\boldsymbol{R}$. Este binecunoscut faptul că $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ dacă și numai dacă, oricare ar fi șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n\neq x_0$ și $x_n\to x_0$, avem $f(x_n)\to l$. Să considerăm șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n\in\boldsymbol{Q},\ x_n\neq x_0$ și $x_n\to x_0$. Atunci $f(x_n)=3-2x_n$, de unde $f(x_n)\to 3-2x_0$. Fie șirul $(x'_n)_{n\geq 1}$ cu $x'_n\in\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q},\ x'_n\neq x_0$ și $x'_n\to x_0$. În acest caz, $f(x'_n)=x'_n$, de unde $f(x'_n)\to x_0$. Cum cele două șiruri de valori ale funcției f trebuie să conveargă la aceeași limită, rezultă că $3-2x_0=x_0$, de unde $x_0=1$. Deci, funcția f poate avea limită doar în $x=1$. Rămâne să arătăm că f are limită în $x=1$ și că $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir oarecare de numere reale cu $x_n\neq 1$ și $x_n\to 1$. Dacă $x_n\in\boldsymbol{Q}$, atunci $|f(x_n)-1|=2|x_n-1|$, iar dacă $x_n\in\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$, atunci $|f(x_n)-1|=|x_n-1|$. Cum $x_n\to 1$, rezultă că $|x_n-1|\to 0$, ceea ce implică $|f(x_n)-1|\to 0$, de unde $f(x_n)\to 1$. Deci, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

Observație: Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ are o infinitate de termeni în $\boldsymbol{Q}$ și un număr finit de termeni în $\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$, atunci termenii iraționali se elimină. Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ are o infinitate de termeni în $\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$ și un număr finit de termeni în $\boldsymbol{Q}$, atunci termenii raționali se elimină. Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ are o infinitate de termeni în $\boldsymbol{Q}$ și o infinitate de termeni în $\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$, atunci se consideră subșirurile $(x'_n)_{n\geq 1}$ și $(x''_n)_{n\geq 1}$ (ale șirului $(x_n)_{n\geq 1}$) cu $x'_n\in\boldsymbol{Q}$ și $x''_n\in\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$.

10. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ***cu proprietatea că*** $|f(x)-x\sin x|\leq|x^3|$**,** ***oricare ar fi*** $x\in\boldsymbol{R}$**.**
Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$**.**

Soluție: Deoarece $|f(x)-x\sin x|\leq|x^3|$, rezultă că $-|x^3|\leq f(x)-x\sin x\leq|x^3|$, ceea ce conduce la $x\sin x-|x^3|\leq f(x)\leq x\sin x+|x^3|$. Având în vedere că $x\neq 0$, rezultă că $x^2>0$. Împărțind prin x^2, relația anterioară devine $\dfrac{\sin x}{x}-|x|\leq\dfrac{f(x)}{x^2}\leq\dfrac{\sin x}{x}+|x|$ (oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}^*$). Remarcând și faptul că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}-|x|\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+|x|\right)=1$, deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$.

11. ***Calculați*****:**

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[ax]}{x}$ $(a\in\boldsymbol{R}^*)$**;** **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[5x]-[2x]}{[3x]}$**;** **c)** $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left[\dfrac{1}{x}\right]$**;** **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left[e^x\right]$**;**

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{a}\left[\dfrac{b}{x-1}\right]$ $(a,\ b\in\boldsymbol{R},\ a>0)$**.**

Soluție: **a)** Deoarece $x\to\infty$, putem considera că $x>0$. Cum $ax-1<[ax]\leq ax$, rezultă că $a-\dfrac{1}{x}<\dfrac{[ax]}{x}\leq a$. Ținând seama și de faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a-\dfrac{1}{x}\right)=a$ și $\lim\limits_{x\to\infty}a=a$, conchidem că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[ax]}{x}=a$.

b) Evident, putem considera că $x>0$. Atunci, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[5x]-[2x]}{[3x]}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{[5x]}{x}-\dfrac{[2x]}{x}}{\dfrac{[3x]}{x}}$. Având în vedere cele stabilite la a), deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[5x]-[2x]}{[3x]}=\dfrac{5-2}{3}=1$.

c) Întrucât $\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leq\dfrac{1}{x}$ și $x^2>0$ (căci $x\neq 0$), rezultă că $x-x^2<x^2\left[\dfrac{1}{x}\right]\leq x$. Remarcând și

faptul că $\lim\limits_{x\to 0}(x-x^2)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x=0$, conchidem că $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left[\frac{1}{x}\right]=0$.

d) Evidențiem, mai întâi, faptul că $e^x-1<[e^x]\le e^x$. Cum $e^{-x}>0$, rezultă că $1-e^{-x}<e^{-x}[e^x]\le 1$. Având în vedere și faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}(1-e^{-x})=\lim\limits_{x\to\infty}1=1$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left[e^x\right]=1$.

e) Pentru început, remarcăm că $\frac{b}{x-1}-1<\left[\frac{b}{x-1}\right]\le\frac{b}{x-1}$ și că $x\ne 1$. Fie $x\in(-\infty,\ 1)$. Atunci $\frac{x-1}{a}<0$ (căci $a>0$). Înmulțind relația anterioară cu $\frac{x-1}{a}$, obținem $\frac{b}{a}\le\frac{x-1}{a}\left[\frac{b}{x-1}\right]<\frac{b}{a}-\frac{x-1}{a}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{b}{a}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\frac{b}{a}-\frac{x-1}{a}\right)=\frac{b}{a}$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x-1}{a}\left[\frac{b}{x-1}\right]=\frac{b}{a}$. Fie $x\in(1,\ \infty)$. În acest caz, $\frac{x-1}{a}>0$. Deducem că $\frac{b}{a}-\frac{x-1}{a}<\frac{x-1}{a}\left[\frac{b}{x-1}\right]\le\frac{b}{a}$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{b}{a}-\frac{x-1}{a}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{b}{a}=\frac{b}{a}$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x-1}{a}\left[\frac{b}{x-1}\right]=\frac{b}{a}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{a}\left[\frac{b}{x-1}\right]=\frac{b}{a}$.

12. ***Fie*** $m,\ n\in\boldsymbol{N}^*$ ***și funcția*** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^m[x^{-n}]$. ***Calculați*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)$.

Soluție: Întrucât $x^{-n}-1<[x^{-n}]\le x^{-n}$ și $x^n>0$, rezultă că $1-x^n<x^n[x^{-n}]\le 1$. Remarcând și faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1-x^n)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}1=1$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^n[x^{-n}]=1$. Având în vedere că $f(x)=x^{m-n}x^n[x^{-n}]$ (oricare ar fi $x>0$) și că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^{m-n}=\begin{cases}\infty\ ,\ \text{dacă}\ m<n\\ 1\ ,\ \text{dacă}\ m=n\\ 0\ ,\ \text{dacă}\ m>n\end{cases}$, conchidem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\begin{cases}\infty\ ,\ \text{dacă}\ m<n\\ 1\ ,\ \text{dacă}\ m=n\\ 0\ ,\ \text{dacă}\ m>n\end{cases}$.

13. ***Calculați*****:**

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x\sin\frac{1}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x-\cos x}{x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}(3+2\sin x)\ln x$; **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+2\cos x)e^x$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{3+2\sin x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\cos x)e^{-x}\ln x$.

Soluție: a) Deoarece $\left|\sin x\sin\frac{1}{x}\right|=\left|\sin x\right|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le\left|\sin\frac{1}{x}\right|$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, iar $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\sin\frac{1}{x}\right|=0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

b) Având în vedere că se calculează limita pentru $x\to\infty$, putem considera că $x>0$. Atunci, $\left|\frac{\sin x-\cos x}{x}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x}\right|\le\left|\frac{\sqrt{2}}{x}\right|=\frac{\sqrt{2}}{x}$. Remarcând și faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{x}=0$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x-\cos x}{x}=0$.

c) Evident, putem considera că $x>1$. Atunci, $(3+2\cos x)\ln x\ge(3-2)\ln x=\ln x$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}(3+2\cos x)\ln x=\infty$.

d) Întrucât $\left|(3+2\cos x)e^x\right|=(3+2\cos x)e^x\le(3+2)e^x=5e^x$, iar $\lim\limits_{x\to-\infty}5e^x=0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+2\cos x)e^x=0$.

e) Deoarece $0<3+2\sin x\le 5$, rezultă că $\frac{1}{3+2\sin x}\ge\frac{1}{5}$, de unde $\frac{e^x}{3+2\sin x}\ge\frac{e^x}{5}$ (oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$). Remarcând şi faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{5}=\infty$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{3+2\sin x}=\infty$.

f) Remarcăm, mai întâi, faptul că putem considera $x>1$. Atunci, $0\le(1-\cos x)e^{-x}\ln x\le 2e^{-x}\ln x=$ $=2\frac{x}{e^x}\cdot\frac{\ln x}{x}$. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty}2\frac{x}{e^x}\cdot\frac{\ln x}{x}=0$ (căci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$), conchidem că $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\cos x)e^{-x}\ln x=0$.

14. ***Calculaţi*****:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n+1}\sin\frac{1}{n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Soluţie: a) Fie $a_n=\frac{n^2+2n}{n+1}\sin\frac{1}{n}$, $n\in\boldsymbol{N}^*$ şi funcţia $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x}{x+1}\sin\frac{1}{x}$. Evident, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+2)}{x+1}\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1\cdot 1=1$ (căci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$). Să considerăm şirul $\left(x_n\right)_{n\ge 1}$ cu $x_n=n$. Deoarece $x_n\to\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1$. Remarcând că $a_n=f(x_n)$, conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

b) Fie $a_n=n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$, $n\in\boldsymbol{N}^*$ şi funcţia $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)$. Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2^t-1}{t}=\ln 2$. Să considerăm şirul $\left(x_n\right)_{n\ge 1}$ cu $x_n=n$. Întrucât $x_n\to\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\ln 2$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\ln 2$. Evidenţiind şi faptul că $a_n=f(x_n)$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ln 2$.

c) Fie $a_n=\sqrt{n}\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, $n\in\boldsymbol{N}^*$ şi funcţia $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.
Se observă cu uşurinţă că

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Remarcând şi faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ (s-a făcut substituţia $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=t$), iar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$. Să considerăm şirul $\left(x_n\right)_{n\ge 1}$ cu $x_n=n$. Întrucât $x_n\to\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\frac{1}{2}$. Ţinând seama că $a_n=f(x_n)$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$.

15. ***Fie*** $a\in(1,\ \infty)$ ***şi funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=(x^2+1)a^{-x}$. ***Arătaţi că*** f ***nu este funcţie raţională.***

Soluţie: Presupunem, din contra, că f este funcţie raţională. Atunci, există două funcţii polinomiale cu

coeficienți reali P, Q astfel încât $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$. Drept urmare, $\frac{P(x)}{(x^2+1)Q(x)}=a^{-x}$, de unde $\frac{P(x)}{Q_1(x)}=a^{-x}$ (s-a notat $(x^2+1)Q(x)=Q_1(x)$). Evident, $Q_1(x)$ este o funcție polinomială. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}a^{-x}=\infty$ (căci $a>1$). Rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q_1(x)}=\infty$, ceea ce ara loc doar dacă $\text{grad}\,P>\text{grad}\,Q_1$. Remarcând şi faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}a^{-x}=0$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q_1(x)}=0$, ceea ce este posibil numai dacă $\text{grad}\,P<\text{grad}\,Q_1$. Contradicția la care s-a ajuns arată că presupunerea făcută este falsă. Deci, f nu este funcție rațională.

16. ***Arătați că funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+x+1}$ ***nu este rațională.***

Soluție: Presupunem, din contra, că f este funcție rațională. Atunci, există două funcții polinomiale cu coeficienți reali P, Q astfel încât $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$. Drept urmare, $\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\frac{P(x)}{x^2Q(x)}$, de unde $\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\frac{P(x)}{Q_1(x)}$ (s-a notat $x^2Q(x)=Q_1(x)$). Evident, $Q_1(x)$ este o funcție polinomială. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=1$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q_1(x)}=1$, egalitate posibilă doar dacă $\text{grad}\,P(x)=\text{grad}\,Q_1(x)$. Fie $n=\text{grad}\,P$. Atunci $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ şi $Q_1(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0$ ($a_n\neq0$ şi $b_n\neq0$). Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q_1(x)}=\frac{a_n}{b_n}$, deducem că $\frac{a_n}{b_n}=1$. Pe de altă parte, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=-1$, de unde $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q_1(x)}=-1$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q_1(x)}=\frac{a_n}{b_n}=-1$, rezultă că $\frac{a_n}{b_n}=-1$. Ținând seama de faptul că egalitățile $\frac{a_n}{b_n}=1$ şi $\frac{a_n}{b_n}=-1$ sunt contradictorii, conchidem că presupunerea făcută este falsă. Deci, f nu este funcție rațională.

Cazuri de nedeterminare

Pentru cele ce urmează, este bine să reținem următoarele:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)^{2k}}=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}}\frac{1}{(x-x_0)^{2k-1}}=-\infty$ **şi** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}}\frac{1}{(x-x_0)^{2k-1}}=\infty$ $(k\in\boldsymbol{N}^*)$**.**

2. Fie $P(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1x+a_0$, $Q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0$ ($a_m\neq0$, $b_n\neq0$) şi $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$. Atunci: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } m<n\\ \frac{a_m}{b_n}, & \text{dacă } m=n\\ \frac{a_m}{b_n}\cdot\infty, & \text{dacă } m>n\end{cases}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } m<n\\ \frac{a_m}{b_n}, & \text{dacă } m=n.\\ \frac{a_m}{b_n}\cdot(-\infty)^{m-n}, & \text{dacă } m>n\end{cases}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$ $(\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{R},\ \beta\neq0)$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1-\cos u(x)}{u^2(x)}=\frac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a\in(0,\ 1)\cup(1,\ \infty))$. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\infty$ sau $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=-\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e$. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}=e$.

Cazul $\dfrac{0}{0}$

1. ***Calculaţi*:**

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-6x+8}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-3x+2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+3x^3+3x^2+x}{x^4+2x^3-2x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}\ (n\in N,\ n\ge 2)$; **e)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-3x^2+3x-1}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-2x^2-4x+8}$.

Soluţie: a) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2-5x+2\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-6x+8\right)=0$. Având în vedere că $2x^2-5x+2=(x-2)(2x-1)$, $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$, deducem că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-6x+8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x-4}=-\dfrac{3}{2}$.

b) Evident, $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-4x^2+5x-2\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-3x+2\right)=0$. Cum $x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$, iar $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+2}=-\dfrac{1}{3}$.

c) Pentru început, remarcăm că $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^4+3x^3+3x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to -1}\left(x^4+2x^3-2x-1\right)=0$. Ţinând seama că $x^4+3x^3+3x^2+x=x(x+1)^3$ şi $x^4+2x^3-2x-1=(x-1)(x+1)^3$, deducem că $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+3x^3+3x^2+x}{x^4+2x^3-2x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$.

d) Se arată cu uşurinţă că $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^n-nx+n-1\right)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$. Remarcând că $x^n-nx+n-1=$

$=(x-1)^2\left[x^{n-2}+2x^{n-3}+3x^{n-4}+\ldots+(n-2)x+(n-1)\right]$, deducem că

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\left[x^{n-2}+2x^{n-3}+3x^{n-4}+\ldots+(n-2)x+(n-1)\right]=1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}.$$

e) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x-2\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-3x^2+3x-1\right)=0$. Având în vedere că $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ şi $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$, deducem că

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-3x^2+3x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{(x-1)^2}=\infty.$$

f) Evident, $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+x-6\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-2x^2-4x+8\right)=0$. Cum $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ şi $x^3-2x^2-4x+8=(x-2)^2(x+2)$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-2x^2-4x+8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{(x-2)(x+2)}$. Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{x+3}{(x-2)(x+2)}=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{x+3}{(x-2)(x+2)}=\infty$, conchidem că limita considerată nu există.

2. ***Calculați*:**

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{3x^2+5x+2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}-3}{x^2-1}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$.

Soluție: a) Deoarece

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}-1\right)=\lim_{x\to 1}\left[\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x+1\right)-1\right]=3,$$

cerința enunțului a fost îndeplinită.

b) Evident, $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)=\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^2+5x+2\right)=0$. Amplificând fracția a cărei limită trebuie să o calculăm prin conjugata numărătorului și ținând seama de faptul că $3x^2+5x+2=(x+1)(3x+2)$, deducem că $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{3x^2+5x+2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3(1-x)(1+x)}{(x+1)(3x+2)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}-2x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3(1-x)}{(3x+2)\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)}=-\dfrac{3}{2}$.

c) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x-\sqrt{x^2+8}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}\right)=0$. Amplificând fracția a cărei limită trebuie să o calculăm atât prin conjugata numărătorului, cât și prin conjugata numitorului, deducem că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8(x^2-1)\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3}\right)}{(x-1)\left(3x+\sqrt{x^2+8}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8(x+1)\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3}\right)}{3x+\sqrt{x^2+8}}=\dfrac{32}{3}$.

d) Evident, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{2x+1}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)=0$. Amplificând fracția a cărei limită trebuie să o calculăm atât prin conjugata numărătorului, cât și prin conjugata numitorului, deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt[3]{2x+1}+1}=2.$$

e) Pentru început, remarcăm că $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}-3\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0$. Având în vedere acest rezultat, pentru calcularea limitei considerate, vom proceda după cum urmează: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}-3}{x^2-1}=$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}+\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{2}{(x+1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}\right]=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}.$$

f) Notând $\sqrt[n]{x+1}-1=t$ și remarcând că $t\to 0$ (căci $x\to 0$), deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(t+1)^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t^n+C_n^1t^{n-1}+C_n^2t^{n-2}+....+C_n^{n-2}t^2+C_n^{n-1}t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{n-1}+C_n^1t^{n-2}+....+C_n^{n-2}t+C_n^{n-1}}=\frac{1}{C_n^{n-1}}=\frac{1}{n}.$$

3. ***Calculați*:**

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}+2\sqrt{x+3}-6}{x^2+x-2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x+2}-3}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x+2^{3-x}-6}{\sqrt{2^{-x}}-2^{1-x}}$.

Soluție: a) Evident, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt[3]{x+7}+2\sqrt{x+3}-6\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x-2\right)=0$. În acest caz, pentru calcularea limitei considerate, procedăm după cum urmează:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}+2\sqrt{x+3}-6}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2+x-2}+\frac{2\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x^2+x-2}\right)=$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(x+2)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}+\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\right)=$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}+\frac{2}{(x+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\right)=\frac{1}{36}+\frac{1}{6}=\frac{7}{36}.$$

b) Pentru început, remarcăm că $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{3x-2}-5\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x+2}-3\right)=0$ şi că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x+2}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)+\left(\sqrt{3x-2}-2\right)}{\left(\sqrt{x^2-3}-1\right)+\left(\sqrt{x+2}-2\right)}$. Împărţind atât numărătorul, cât şi numitorul ultimei fracţii cu $x-2$ (ceea ce este posibil, căci $x\neq 2$), deducem că

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x+2}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}+\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}}{\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}+\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}+\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+2}}{\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}}=\frac{17}{27}.$$

c) Notând $2^x=t$ şi remarcând că $t\to 4$ (căci $x\to 2$), deducem că

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x+2^{3-x}-6}{\sqrt{2^{-x}}-2^{1-x}}=\lim_{t\to 4}\frac{t+\dfrac{8}{t}-6}{\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\dfrac{2}{t}}=\lim_{t\to 4}\frac{t^2-6t+8}{\sqrt{t}-2}=\lim_{t\to 4}\frac{(t-2)(t-4)\left(\sqrt{t}+2\right)}{t-4}=\lim_{t\to 4}(t-2)\left(\sqrt{t}+2\right)=8.$$

4. ***Fie*** $a,\ b\in\boldsymbol{R},\ a\geq -2$**.** ***Determinaţi*** a ***şi*** b**,** ***ştiind că*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+a}-b}{x^2+2x-3}=\dfrac{3}{16}$**.**

Soluţie: Deoarece $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x-3\right)=0$, pentru ca egalitatea din enunţ să fie posibilă, este necesar ca $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+x+a}-b\right)=0$, ceea ce conduce la $\sqrt{a+2}=b$, de unde $b\geq 0$ şi $a=b^2-2$. Atunci,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+a}-b}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+a-b^2}{x^2+2x-3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+a}+b}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+b^2-2}+b}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+b^2-2}+b}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{|b|+b}=\frac{3}{8b}.$$ Cum $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+a}-b}{x^2+2x-3}=\dfrac{3}{16}$, rezultă că $b=2$ şi, cum $a=b^2-2$, deducem că $a=2$.

5. ***Calculaţi*****:**

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$**;** **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{1+2\sin 2x-\cos 4x}$**;** **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{2x-\sin 3x}$**;** **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\sin x}{\sin x+2x\cos x}$**;**

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$**;** **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\sin x^2}$**;** **g)** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos x}$**.**

Soluţie: **a)** Evident, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin x\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2x\right)=0$. Remarcând că

$1+\cos 2x=2\cos^2 x=2(1-\sin^2 x)$, deducem că $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2(1+\sin x)}=\dfrac{1}{4}$.

b) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to 0}\sin 6x=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2\sin 2x-\cos 4x\right)=0$. Având în vedere că $\sin 6x=2\sin 3x\cos 3x=2\sin x(3-4\sin^2 x)\cos 3x$ şi

$1+2\sin 2x-\cos 4x=2\sin^2 2x+2\sin 2x=\ 2\sin 2x(1+\sin 2x)=4\sin x\cos x(1+\sin 2x)$,

deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{1+2\sin 2x-\cos 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3-4\sin^2 x)\cos 3x}{2\cos x(1+\sin 2x)}=\dfrac{3}{2}$.

c) Evidențiem, mai întâi, faptul că $\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin 2x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x-\sin 3x)=0$. Împărțind prin x atât numărătorul, cât şi numitorul fracției a cărei limită trebuie să o calculăm, deducem că

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{2x-\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sin 2x}{x}}{2-\dfrac{\sin 3x}{x}}=\frac{1-2}{2-3}=1.$$

d) Procedând ca la c), obținem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\sin x}{\sin x+2x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\sin x}{x}+2\cos x}=1$.

e) Ținând seama de faptul că $\cos 2x-\cos 4x=2\sin x\sin 3x$, deducem că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}=6.$$

f) Evident, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\cos 3x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin x^2=0$. Se arată cu uşurință că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{\sin x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x}{\sin x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{x^2}{\sin x^2}=4.$$

g) Făcând substituția $\pi-x=t$, obținem $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\sin t}{1-\cos t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\cdot\dfrac{t^2}{1-\cos t}=2$.

6. ***Calculați*:**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x^2}}{1-\cos 2x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos 2x\right)}{x\sin(\sin x)}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x\sin x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ $(m,\ n\in N^*)$; **f)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-x-2}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos 2x)}{x^4}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n-\cos 2x-\cos 4x-\ldots-\cos 2nx}{x^2}$ $(n\in N^*)$.

Soluție: a) Evident, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\cos 2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)=0$. Remarcând că $\sqrt{1-\cos 2x^2}=\sqrt{2}\sin x^2$ şi $1-\cos 2x=2\sin^2 x$, deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x^2}}{1-\cos 2x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{\sin^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}\cdot\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Pentru început, remarcăm că $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos 2x\right)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin(\sin x)=0$. Cum

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos 2x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos 2x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos 2x)\right]=\sin\left(\pi\sin^2 x\right),\ \text{rezultă că}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos 2x\right)}{x\sin(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\sin^2 x\right)}{x\sin(\sin x)}=\pi\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\sin^2 x\right)}{\pi\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\sin(\sin x)}=\pi.$$

c) Se arată cu uşurință că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{1-\cos 2x}{x^2}\cos x\right)=\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

d) Evident, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin x=0$. Deoarece $\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x\sin x}=\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x\sin x}-$

$-\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}=\frac{1-\cos x}{x\sin x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}-\frac{1-\cos x}{x\sin x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}-$

$-\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x\sin x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{12}$.

e) Făcând substituția $x=t+\pi$, deducem că

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(m\pi+mt)}{\sin(n\pi+nt)}=\lim_{t\to 0}\frac{(-1)^m\sin mt}{(-1)^n\sin nt}=(-1)^{m-n}\lim_{t\to 0}\frac{\sin mt}{t}\cdot\frac{t}{\sin nt}=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

f) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to -1}\sin(x^2-1)=\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-x-2\right)=0$. Având în vedere că, dacă $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$, deducem că

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{2}{3}.$$

g) Pentru început, remarcăm că $\lim\limits_{x\to 0}\left[1-\cos(1-\cos 2x)\right]=\lim\limits_{x\to 0}x^4=0$. Evidențiind faptul că $1-\cos(1-\cos 2x)=1-\cos(2\sin^2 x)=2\sin^2(\sin^2 x)$, deducem că

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos 2x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\sin^2 x)}{x^4}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\sin^2 x)}{\sin^4 x}\cdot\frac{\sin^4 x}{x^4}=2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(\sin^2 x)}{\sin^2 x}\right]^2\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4=2.$$

h) Evident, $\lim\limits_{x\to 0}\left(n-\cos 2x-\cos 4x-\ldots-\cos 2nx\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$. Se arată cu uşurinţă că

$$\lim_{x\to 0}\frac{n-\cos 2x-\cos 4x-\ldots-\cos 2nx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\frac{1-\cos 4x}{x^2}+\ldots+\frac{1-\cos 2nx}{x^2}\right)=2\cdot 1^2+2\cdot 2^2+\ldots+2n^2=$$

$$=2(1^2+2^2+\ldots+n^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\quad\left(\text{căci }\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2nx}{x^2}=4n^2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2nx}{(2nx)^2}=4n^2\cdot\frac{1}{2}=2n^2\right).$$

7. ***Calculaţi*:**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$ $(a,\ b\in(1,\ \infty))$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^x}{e^{3x}-e^x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-\cos x}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-\cos x}{x\sin x}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(e^x-1)}{2\sin x-\sin 2x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^{\sin x}}{x^3}$.

Soluţie: **a)** Întrucât $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1-(b^x-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right)=\ln a-\ln b$, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

b) Evident, $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{4x}-e^x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x}-e^x\right)=0$. Vom căuta să aducem limita considerată la forma $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)}$ (unde $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$). Ca urmare a acestei precizări, vom proceda după cum urmează:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^x}{e^{3x}-e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{1}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}=\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{2}.$$

c) Ţinând seama de precizarea făcută la b), pentru calcularea limitei considerate, procedăm astfel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1+(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\sin x}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\sin x}-1}{x\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

d) Se observă cu uşurinţă că trebuie să procedăm după cum urmează:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin^2 x}-1}{x\sin x}+\frac{1-\cos x}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

e) Având în vedere cele stabilite anterior, deducem că, pentru calcularea limitei, trebuie să procedăm astfel: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2(e^x-1)}{2\sin x-\sin 2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x^3}{\sin x(1-\cos x)}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\right]=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$

f) Remarcând că $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\operatorname{tg}x-\sin x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x-\sin x}-1}{\operatorname{tg}x-\sin x}\cdot\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}\cdot e^{\sin x}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x-\sin x}-1}{\operatorname{tg}x-\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{e^{\sin x}}{\cos x}=\frac{1}{2}$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

8. ***Calculați*:**

a) $\lim_{x\to 1}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e}{1-x^2}$; **b)** $\lim_{x\to 1}\frac{3^{x^2+x}-9}{x^2-3x+2}$; **c)** $\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x^2-x-2}$; **d)** $\lim_{x\to 3}\frac{3^x-x^3}{x^2-4x+3}$; **e)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4^{\cos x}-2}{\pi-3x}$.

Soluție: a) Se arată cu uşurință că $\lim_{x\to 1}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e}{1-x^2}=e\lim_{x\to 1}\frac{e^{\frac{1}{x}-1}-1}{1-x^2}=e\lim_{x\to 1}\frac{e^{\frac{1-x}{x}}-1}{\frac{1-x}{x}}\cdot\frac{1}{x(1+x)}=e\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{e}{2}.$

b) Având în vedere că $\lim_{x\to 1}\frac{3^{x^2+x}-9}{x^2-3x+2}=9\lim_{x\to 1}\frac{3^{x^2+x-2}-1}{x^2+x-2}\cdot\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=9\lim_{x\to 1}\frac{3^{x^2+x-2}-1}{x^2+x-2}\cdot\frac{x+2}{x-2}=$

$=-27\ln 3$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

c) Evident, $\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4-(x^2-4)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\left(4\cdot\frac{2^{x-2}-1}{x^2-x-2}-\frac{x^2-4}{x^2-x-2}\right)=$

$$=\lim_{x\to 2}\left(4\cdot\frac{2^{x-2}-1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{x+2}{x+1}\right)=\frac{4}{3}\ln 2+\frac{4}{3}.$$

d) Remarcând că

$$\lim_{x\to 3}\frac{3^x-x^3}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^x-27-(x^3-27)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\left(27\cdot\frac{3^{x-3}-1}{x-3}\cdot\frac{x-3}{x^2-4x+3}-\frac{x^3-27}{x^2-4x+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(27\cdot\frac{3^{x-3}-1}{x-3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+3x+9}{x-1}\right)=\frac{27}{2}\ln 3-\frac{27}{2},$$

cerința enunțului este îndeplinită.

e) Evidențiem, mai întâi, că

$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4^{\cos x}-2}{\pi-3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2^{2\cos x}-2}{\pi-3x}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2^{2\cos x-1}-1}{\pi-3x}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2^{2\cos x-1}-1}{2\cos x-1}\cdot\frac{2\cos x-1}{\pi-3x}$ şi că $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2^{2\cos x-1}-1}{2\cos x-1}=\ln 2.$

Făcând substituția $x=\frac{\pi}{3}+t$, obținem $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{\pi-3x}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+t\right)-1}{-3t}=-\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sqrt{3}\sin t-1}{t}=$

$$=\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\left(\sqrt{3}\frac{\sin t}{t}+\frac{1-\cos t}{t^2}t\right)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Drept urmare, $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4^{\cos x}-2}{\pi-3x}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ln 2.$

Cazul $\frac{\infty}{\infty}$

1. ***Calculați*:**

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2+1}{2x^3+x+2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2-2}{2x^3+x+1}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+x+1}{3x^4+x^2+3}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{3x^3+x-2}$; **e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^4+x^2-1}{2x^2-x+1}$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5+x^3-x+1}{x^2-x-2}$.

Soluție: a) Întrucât $\text{grad}\left(4x^3-x^2+1\right)=\text{grad}\left(2x^3+x+2\right)$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2+1}{2x^3+x+2}=\dfrac{4}{2}=2$.

b) Remarcând că $\text{grad}\left(-3x^4+x^2-2\right)>\text{grad}\left(2x^3+x+1\right)$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2-2}{2x^3+x+1}=-\infty$.

c) Cum $\text{grad}\left(-2x^2+x+1\right)<\text{grad}\left(3x^4+x^2+3\right)$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+x+1}{3x^4+x^2+3}=0$.

d) Având în vedere că $\text{grad}\left(2x^2-x+1\right)<\text{grad}\left(3x^3+x-2\right)$, deducem că $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{3x^3+x-2}=0$.

e) Deoarece $\text{grad}\left(-3x^4+x^2-1\right)>\text{grad}\left(2x^2-x+1\right)$, rezultă că $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^4+x^2-1}{2x^2-x+1}=\dfrac{-3}{2}(-\infty)^{4-2}=-\infty$.

f) Evident, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5+x^3-x+1}{x^2-x-2}=(-\infty)^{5-2}=-\infty$.

2. ***Fie*** $n\in\boldsymbol{N}$, $n\geq 2$ ***şi*** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x^n+2x-1}{x^4+x+1}$. ***Calculați*** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

Soluție: Dacă $n\in\{2,\ 3\}$, atunci $\text{grad}\left(x^n+2x-1\right)<\text{grad}\left(x^4+x+1\right)$, ceea ce arată că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

Dacă $n=4$, atunci $\text{grad}\left(x^n+2x-1\right)=\text{grad}\left(x^4+x+1\right)$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$. Dacă $n\geq 5$, atunci $\text{grad}\left(x^n+2x-1\right)>\text{grad}\left(x^4+x+1\right)$, ceea ce conduce la $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

3. ***Fie*** $n\in\boldsymbol{N}$, $n\geq 2$ ***şi*** $f:(-\infty,\ 0)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x^n-x+1}{2x^5-x^2+x-1}$. ***Calculați*** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

Soluție: Dacă $n\in\{2,\ 3,\ 4\}$, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. Dacă $n=5$, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$. Dacă $n\geq 6$ şi n este număr natural impar, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, iar dacă $n\geq 6$ şi n este număr natural par, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

4. ***Calculați*:**

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x^3+2}}{\sqrt{x^2+x+1}}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{\sqrt{x^4+1}}$; **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{\sqrt{x^2-x+2}}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^3-3x^2+1}}{x\sqrt{x}+1}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}+3e^x}{e^{3x}+2e^{2x}}$; **g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^{2x})}{x+2}$; **h)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^{2x})}{\ln(1+e^x)}$.

Soluție:

a) Deoarece $\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x+1}=\dfrac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}$ (căci $x>0$), rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$.

b) Remarcând că $\frac{\sqrt{x^4+x^3+2}}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^4}}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^4}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+x^3+2}}{\sqrt{x^2+x+1}}=\infty$.

c) Întrucât $\frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{\sqrt{x^4+1}}=\frac{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{\sqrt{x^4+1}}=0$.

d) Evidențiind faptul că $\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{\sqrt{x^2-x+2}}=\frac{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=-x\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$ (căci $x<0$), deducem că $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{\sqrt{x^2-x+2}}=\infty$.

e) Cum $\frac{\sqrt{4x^3-3x^2+1}}{x\sqrt{x}+1}=\frac{x\sqrt{x}\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}}{x\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)}=\frac{\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}}{1+\frac{1}{x\sqrt{x}}}$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^3-3x^2+1}}{x\sqrt{x}+1}=2$.

f) Evidențiind faptul că $\frac{e^{2x}+3e^x}{e^{3x}+2e^{2x}}=\frac{e^{2x}\left(1+3e^{-x}\right)}{e^{3x}\left(1+2e^{-x}\right)}=e^{-x}\frac{1+3e^{-x}}{1+2e^{-x}}$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+3e^x}{e^{3x}+2e^{2x}}=0$.

g) Remarcăm, mai întâi, că $\frac{\ln(1+e^{2x})}{x+2}=\frac{\ln e^{2x}(e^{-2x}+1)}{x+2}=\frac{2x+\ln(e^{-2x}+1)}{x+2}=\frac{2+\frac{1}{x}\ln(e^{-2x}+1)}{1+\frac{2}{x}}$. Drept urmare, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+e^{2x})}{x+2}=2$.

h) Având în vedere că $\frac{\ln(1+e^{2x})}{\ln(1+e^x)}=\frac{\ln e^{2x}(e^{-2x}+1)}{\ln e^x(e^{-x}+1)}=\frac{2x+\ln(e^{-2x}+1)}{x+\ln(e^{-x}+1)}=\frac{2+\frac{1}{x}\ln(e^{-2x}+1)}{1+\frac{1}{x}\ln(e^{-x}+1)}$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+e^{2x})}{\ln(1+e^x)}=2$.

Cazul $\infty-\infty$

1. ***Calculați*:**

a) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{2x^2-x-1}\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^2-1}\right)$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(ex+1)-\ln(x+2)\right]$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(x^3+1)-\ln(x^2+1)\right]$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[2\ln(x+3)+3\ln(x+2)-5\ln(x+1)\right]$.

Soluție: a) Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{1}{x-2}=-\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{4}{x^2-4}=-\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{1}{x-2}=\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{4}{x^2-4}=\infty$, pentru limita considerată suntem în cazul de nedeterminare $\infty-\infty$. Având în vedere că

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4},$$

cerința enunțului a fost îndeplinită.

b) La fel ca la a), arătăm că, în cazul considerat, limita respectivă conduce la cazul de nedeterminare $\infty-\infty$. Pe de altă parte, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{2x^2-x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1-3}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{2x+1}=\frac{2}{3}$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

c) Se arată cu uşurință că, pentru limita considerată, suntem în cazul de nedeterminare $\infty-\infty$. Ținând seama de faptul că

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+1)-2(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-2x-1}{(x+1)(x^2+x+1)}=$$

$=-\frac{1}{2}$, rezolvarea problemei este încheiată.

d) Evident, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}$. Cum $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}=\infty$, iar

$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}=-\infty$, rezultă că limita inițială nu există.

e) Remarcăm, mai întâi, că pentru limita considerată suntem în cazul de nedeterminare $\infty-\infty$. Întrucât $\lim_{x\to\infty}\left[\ln(ex+1)-\ln(x+2)\right]=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{ex+1}{x+2}=\ln e=1$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

f) Evident, limita considerată conduce la cazul de nedeterminare $\infty-\infty$. Remarcând că $\lim_{x\to\infty}\left[\ln(x^3+1)-\ln(x^2+1)\right]=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^3+1}{x^2+1}=\infty$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

g) Întrucât $x\left[2\ln(x+3)+3\ln(x+2)-5\ln(x+1)\right]=2x\left[\ln(x+3)-\ln(x+1)\right]+3x\left[\ln(x+2)-\ln(x+1)\right]=$

$=2x\ln\frac{x+3}{x+1}+3x\ln\frac{x+2}{x+1}=2\ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x+3\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$, iar $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x+1}}=e^2$,

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x=e$, rezultă că $\lim_{x\to\infty}x\left[2\ln(x+3)+3\ln(x+2)-5\ln(x+1)\right]=2\ln e^2+3\ln e=7$.

2. ***Calculați*:**

a) $\lim_{x\to\infty}\left(2x+1-\sqrt{x^2+1}\right)$; **b)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-2x\right)$; **c)** $\lim_{x\to\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2+2}\right)$;

d) $\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{4x^2+2}-2x\right)$; **e)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+x^2}-2x\right)$; **f)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+3\sqrt{x^2+x+2}-4x\right)$;

g) $\lim_{x\to\infty}x\sqrt{x}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}\right)$.

Soluție: a) Remarcăm, mai întâi, că limita considerată conduce la nedeterminarea $\infty-\infty$. Cum $\lim_{x\to\infty}\left(2x+1-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\infty$, cerința enunțului a fost îndeplinită .

b) Evident, $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-2\right)=-\infty$.

c) Se observă cu uşurință că

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2-(x^2+2)}{x+1+\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+1+\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=1.$$

d) Remarcând că $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{4x^2+2}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+2}+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{4+\dfrac{2}{x^2}}+2}=\dfrac{1}{2}$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

e) Deoarece $\sqrt[3]{8x^3+x^2}-2x=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(8x^3+x^2)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3+x^2}+4x^2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{1}{x}\right)^2}+2\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}}+4}$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+x^2}-2x\right)=\dfrac{1}{12}$.

f) Evidențiind faptul că

$$\sqrt{x^2+x+1}+3\sqrt{x^2+x+2}-4x=\sqrt{x^2+x+1}-x+3\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}+\frac{3(x+2)}{\sqrt{x^2+x+2}+x}=$$

$$=\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}+\frac{3\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1},$$

deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+3\sqrt{x^2+x+2}-4x\right)=2$.

g) Remarcând că

$$x\sqrt{x}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}\right)=x\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)-2\sqrt{x}\right]=\frac{x\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)^2-4x\right]}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{2x\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}}=\frac{-2x\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\frac{-2}{\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+2\right)\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+1\right)},$$

deducem că $\lim\limits_{x\to\infty} x\sqrt{x}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}\right)=-\dfrac{1}{4}$.

3. ***Fie*** $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ ***şi funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2+2}+ax+b$. ***Determinați*** a ***şi*** b***, astfel încât*** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$.

Soluție: Dacă $a\geq 0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Deci, pentru a putea îndeplini condiția din enunț, este necesar ca $a<0$. Având în vedere că $f(x)=\dfrac{(a+1)x^3+(b-2)x^2+2ax+2b+1}{x^2+2}$, cerința $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$ este îndeplinită dacă şi numai dacă $a+1=0$ şi $b-2=2$, de unde $a=-1$ şi $b=4$.

4. ***Fie*** $a\in\boldsymbol{R}^*,\ n\in\boldsymbol{N}$ ***şi funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2+1}}-ax^n$. ***Calculați*** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că $f(x)=x^2\left(\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2+1}}-ax^{n-2}\right)$ şi că $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2+1}}=1$. Dacă $n\in\{0,\ 1\}$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-2}=0$ (căci $n-2<0$), deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, oricare ar fi $a\in\boldsymbol{R}^*$. Dacă $n\in\boldsymbol{N}\cap[3,\ \infty)$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-2}=\infty$. Rezultă că, dacă $a<0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, iar dacă $a>0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$. Fie $n=2$. În acest caz, $f(x)=x^2\left(\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2+1}}-a\right)$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2+1}}-a\right)=1-a$, rezultă că, dacă

$a<1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, iar dacă $a>1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$. Dacă $a=1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}-1\right)}{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}+1}=\frac{1}{2}$. Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

5. a) ***Fie*** $a\in\left(\frac{1}{4},\ \infty\right)$ ***şi funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt{ax^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$**.** ***Calculaţi*** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$**.**

b) ***Fie*** $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ ***şi funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+1}+ax+b$**.** ***Determinaţi*** a ***şi*** b**,** ***astfel încât*** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$**.**

c) ***Fie*** $k\in\boldsymbol{R}$ ***şi funcţia*** $f:(1,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2x^k\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$**.** ***Calculaţi*** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$**.**

Soluţie: a) Remarcăm, mai întâi, că $f(x)=x\left(\sqrt{a+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$. Rezultă că, dacă $a\in\left(\frac{1}{4},\ 1\right)$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, iar dacă $a\in(1,\ \infty)$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Fie $a=1$. Atunci,

$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\ =\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}},$$

ceea ce arată că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$.

b) Se observă cu uşurinţă că, dacă $a\ge 0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Deci, este necesar ca $a<0$. Atunci, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\right)=(a+1)\infty$, ceea ce impune $a=-1$. Rezultă că $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x+b$.

Având în vedere că $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+b$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$. Dar, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$. Deci, $b=1$.

c) Pentru început, remarcăm că $f(x)=\frac{2x^k\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}=$

$$=\frac{4x^k\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{4x^{k-2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}.$$

Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty} x^{k-2}=\begin{cases}0\ ,\ k<2\\ 1\ ,\ k=2\\ \infty\ ,\ k>2\end{cases}$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\begin{cases}0\ ,\ k<2\\ 1\ ,\ k=2\\ \infty\ ,\ k>2\end{cases}$.

Cazul $0\cdot\infty$

1. ***Calculaţi*****:**

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x$**;** **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x+1}\sin\frac{1}{x}$**;** **c)** $\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$**;** **d)** $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{e^x-1}\right)$**;** **e)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\operatorname{tg} x$**.**

Soluție: a) Evident, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = -\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$.

b) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1\cdot 1 = 1$ (căci $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$), cerința enunțului a fost îndeplinită .

c) Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} xe^{\frac{1}{x}} = 0\cdot e^{-\infty} = 0$ şi că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{e^t}{t} = \infty$, deducem că $\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$ nu

există .

d) Întrucât $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left(\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{e^x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 0} x\left(\dfrac{x}{\sin x}+\dfrac{x}{e^x-1}\right) = 0$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

e) Făcând substituția $x = \dfrac{\pi}{2}+t$, obținem $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (2x-\pi)\operatorname{tg} x = \lim\limits_{t\to 0} 2t\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right) = -2\lim\limits_{t\to 0} t\operatorname{ctg} t =$

$= -2\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sin t}\cdot\cos t = -2$.

Cazul 1^∞

1. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+x+1}{2x^2+1}\right)^x$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{x^3}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^x$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2^x+1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2+1)-\ln 5}{x-2}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left[1+\ln(2-x)\right]}{x-1}$; **h)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x}\right]^{\frac{16}{(\pi-4x)^2}}$.

Soluție: a) Deoarece

$\left(\dfrac{2x^2+x+1}{2x^2+1}\right)^x = \left(1+\dfrac{x}{2x^2+1}\right)^x = \left[\left(1+\dfrac{x}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{x}}\right]^{\frac{x^2}{2x^2+1}}$, iar $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{x}} = e$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x^2+1} = \dfrac{1}{2}$,

rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+x+1}{2x^2+1}\right)^x = \sqrt{e}$.

b) Având în vedere că $\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{x^3} = \left[\left(1+\dfrac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{2}}\right]^{\frac{2x^3}{x^2+1}}$, iar $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{2}} = e$ şi

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+1} = \infty$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{x^3} = \infty$ (căci $e>1$).

c) Remarcăm, mai întâi, că $\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^x=\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{2}}=\left[\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{2x}}\right]^{\frac{x^2}{x^2+1}}$. Deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^x=e$.

d) Evident, $(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\left\{\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}$. Întrucât $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}=e$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=-\frac{1}{2}$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

e) Întrucât $\left(\frac{2^x+1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}=\left[\left(1+\frac{2^x-2}{3}\right)^{\frac{3}{2^x-2}}\right]^{\frac{2^x-2}{3(x^2-1)}}$, iar $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\frac{2^x-2}{3}\right)^{\frac{3}{2^x-2}}=e$ şi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^x-2}{3(x^2-1)}=$

$=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^{x-1}-1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}\ln 2=\ln\sqrt[3]{2}$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2^x+1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}=e^{\ln\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}$.

f) Remarcând că $\frac{\ln(x^2+1)-\ln 5}{x-2}=\frac{1}{x-2}\ln\frac{x^2+1}{5}=\ln\left(\frac{x^2+1}{5}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\ln\left[\left(1+\frac{x^2-4}{5}\right)^{\frac{5}{x^2-4}}\right]^{\frac{x^2-4}{5(x-2)}}=$

$=\ln\left[\left(1+\frac{x^2-4}{5}\right)^{\frac{5}{x^2-4}}\right]^{\frac{x+2}{5}}$, iar $\lim\limits_{x\to 2}\ln\left[\left(1+\frac{x^2-4}{5}\right)^{\frac{5}{x^2-4}}\right]^{\frac{x+2}{5}}=\ln\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(1+\frac{x^2-4}{5}\right)^{\frac{5}{x^2-4}}\right]^{\frac{x+2}{5}}=\ln e^{\frac{4}{5}}=\frac{4}{5}$,

deducem că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2+1)-\ln 5}{x-2}=\frac{4}{5}$.

g) Deoarece $\frac{\ln\left[1+\ln(2-x)\right]}{x-1}=\frac{\ln\left[1+\ln(2-x)\right]}{\ln(2-x)}\cdot\frac{\ln(2-x)}{x-1}=\ln\left[1+\ln(2-x)\right]^{\frac{1}{\ln(2-x)}}\cdot\ln\left\{\left[1+(1-x)\right]^{\frac{1}{1-x}}\right\}^{-1}$,

iar $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left[1+\ln(2-x)\right]^{\frac{1}{\ln(2-x)}}=\ln e=1$ şi $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left\{\left[1+(1-x)\right]^{\frac{1}{1-x}}\right\}^{-1}=\ln e^{-1}=-1$, rezultă că

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\left[1+\ln(2-x)\right]}{x-1}=-1$.

h) Notând $x=\frac{\pi}{4}-t$ şi ţinând seama că $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos t$, $\sin 2x=\cos 2t$, $\pi-4x=4t$, iar $t\to 0$

(căci $x\to\frac{\pi}{4}$), deducem că $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x}\right]^{\frac{16}{(\pi-4x)^2}}=\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\cos t}{\cos 2t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\frac{\cos t-\cos 2t}{\cos 2t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{\cos t-\cos 2t}{\cos 2t}\right)^{\frac{\cos 2t}{\cos t-\cos 2t}}\right]^{\frac{\cos t-\cos 2t}{t^2}\cdot\frac{1}{\cos 2t}}=e\sqrt{e}$ (fiindcă $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos 2t}{t^2}=2\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2}}{t^2}=\frac{3}{2}$).

2. ***Fie*** $n\in\boldsymbol{N}$, $n\geq 2$ ***şi*** $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{1}{nx}\ln\left[(1+x)\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+3x}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{1+nx}\right]$. ***Calculaţi*** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

Soluție: Deoarece $f(x)=\frac{1}{nx}\left[\ln(1+x)+\frac{1}{2}\ln(1+2x)+\frac{1}{3}\ln(1+3x)+...+\frac{1}{n}\ln(1+nx)\right]=$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)+\frac{1}{2x}\ln(1+2x)+\frac{1}{3x}\ln(1+3x)+...+\frac{1}{nx}\ln(1+nx)\right]=$$

$=\frac{1}{n}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}+\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}+\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}}+...+\ln(1+nx)^{\frac{1}{nx}}\right]$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{n}\left(\underbrace{1+1+1+...+1}_{n\text{ ori}}\right)=1$.

3. ***Fie*** $a,\ b,\ c,\ d\in\boldsymbol{R}$ ***astfel încât*** $ac>0$ ***şi*** $b\neq d$ ***. Calculați*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^x$ **.**

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}$ şi că $\frac{a}{c}>0$. Dacă $\frac{a}{c}<1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^x=0$, iar dacă $\frac{a}{c}>1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^x=\infty$. Fie $\frac{a}{c}=1$. Atunci,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+d}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b-d}{ax+d}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{b-d}{ax+d}\right)^{\frac{ax+d}{b-d}}\right]^{\frac{(b-d)x}{ax+d}}=e^{\frac{b-d}{a}}.$$

4. ***Fie*** $a,\ b\in(0,\ \infty)$ ***şi funcția*** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\left(\frac{2x^2+ax+2}{bx^2+1}\right)^x$ ***. Determinați*** a ***şi*** b***, astfel încât*** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\sqrt{e}$ **.**

Soluție: Evident, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+ax+2}{bx^2+1}=\frac{2}{b}$. Dacă $\frac{2}{b}<1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, iar dacă $\frac{2}{b}>1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Deci, este necesar ca $\frac{2}{b}=1$, de unde $b=2$. Atunci,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+ax+2}{2x^2+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{ax+1}{2x^2+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{ax+1}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{ax+1}}\right]^{\frac{ax^2+x}{2x^2+1}}=e^{\frac{a}{2}}.$$

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=e^{\frac{1}{2}}$, rezultă că $a=1$.

5. ***Fie*** $a,\ b\in(0,\ \infty)$ ***şi funcția*** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\left(a+\frac{bx}{2x^2+1}\right)^x$ ***. Determinați*** a ***şi*** b***, astfel încât*** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=e\sqrt{e}$ **.**

Soluție: Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{bx}{2x^2+1}=0$, rezultă că, dacă $a<1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, iar dacă $a>1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Deci, este necesar ca $a=1$. Atunci,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{bx}{2x^2+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{bx}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{bx}}\right]^{\frac{bx^2}{2x^2+1}}=e^{\frac{b}{2}}.$$ Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=e^{\frac{3}{2}}$, deducem că $b=3$.

6. ***Fie*** $m,\ n,\ p \in \boldsymbol{N}^*$ ***şi funcţia*** $f:[2,\ \infty) \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \left(\dfrac{x^m+2}{x^n+1}\right)^{px-\sqrt{x^2-2x}}$ **.** ***Calculaţi*** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ **.**

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^m+2}{x^n+1} = \begin{cases} 0\ , & \text{dacă } m<n \\ 1\ , & \text{dacă } m=n \\ \infty\ , & \text{dacă } m>n \end{cases}$.

Deoarece $px-\sqrt{x^2-2x} = \dfrac{(p^2-1)x^2+2x}{px+\sqrt{x^2-2x}}$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(px-\sqrt{x^2-2x}\right) = \begin{cases} 1\ , & \text{dacă } p=1 \\ \infty\ , & \text{dacă } p\geq 2 \end{cases}$. Drept urmare, oricare ar fi $p \in \boldsymbol{N}^*$, avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{dacă } m<n \\ \infty\ , & \text{dacă } m>n \end{cases}$, iar dacă $m=n$ şi $p=1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$. Rămâne să determinăm limita considerată în cazul în care $m=n$ şi $p\geq 2$. Atunci,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^n+1}\right)^{x^n+1}\right]^{\frac{px-\sqrt{x^2-2x}}{x^n+1}} = \begin{cases} 1 & , \text{ dacă } n>1 \\ e^{p-1} & , \text{ dacă } n=1 \end{cases}.$$

Probleme propuse

1. Arătaţi că, deşi, funcţiile $f,\ g:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-1},\ \ g(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ nu au limită în $x=1$, totuşi funcţiile $f+g,\ fg,\ \dfrac{f}{g}$ au limită în $x=1$.

2. Calculaţi limitele laterale în punctele indicate, pentru fiecare dintre următoarele funcţii:

a) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-2,\ 2\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ în $x=-2$ şi $x=2$.

b) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 2\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2(x-2)}$ în $x=-1$ şi $x=2$.

c) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ în $x=0$ şi $x=\pi$.

d) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x+2}{1-\cos x}$ în $x=0$.

3. Calculaţi limita în punctul indicat, pentru fiecare dintre următoarele funcţii:

a) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{3\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{(x-3)^2}$ în $x=3$;

b) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x-2}{|x-1|}$ în $x=1$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} 2x-1\ , & x\in(-\infty,\ 2) \\ 2x+1\ , & x\in[2,\ \infty) \end{cases}$ în $x=2$;

d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}1-2x & ,\ x<-1\\ x^2+x+3 & ,\ x\ge -1\end{cases}$ în $x=-1$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+1 & ,\ x\le 0\\ \dfrac{\sin x}{x} & ,\ x>0\end{cases}$ în $x=0$;

f) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{2\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-2)^2} & ,\ x<2\\ \ln(x^2-4) & ,\ x>2\end{cases}$ în $x=2$.

4. Determinați $a\in\boldsymbol{R}$, astfel încât fiecare dintre următoarele funcții să aibă limită în punctul indicat în dreptul ei:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}4x+a^2 & ,\ x<-1\\ 3ax & ,\ x\ge -1\end{cases}$ în $x=-1$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & ,\ x<1\\ x^2-x+a & ,\ x\ge 1\end{cases}$ în $x=1$;

c) $f:\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & ,\ x\le 0\\ \dfrac{a\sin x}{x^2+x} & ,\ x>0\end{cases}$ în $x=0$;

d) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=a\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$ în $x=1$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2^{ax}\ (1+\sin x)$ în $x=\infty$;

f) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^a\sin\dfrac{1}{x}$ în $x=0$.

5. Arătați că nici una dintre următoarele funcții nu are limită în punctul indicat în dreptul ei:

a) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sin\dfrac{1}{x-1}$ în $x=1$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2\cos x-\sin x$ în $x=\infty$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x-[x]$ în $x=\infty$.

6. Arătați că funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x & ,\ x\in\boldsymbol{Q}\\ 4-x & ,\ x\in\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}\end{cases}$ are limită doar în $x=2$ și că $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=2$.

7. Se consideră funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ cu proprietatea că $|f(x)-\cos x|\le x^2|\sin x|$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

8. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x^2\sin\dfrac{1}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\sin x\right)e^x$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}(2+\sin x)\ln x$; **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x+2\cos x)e^{-x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x+1}+\dfrac{\cos x}{x+2}\right)$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-\sin x\right)$; **g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\cos x}{x+2\cos x}$; **h)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(3+2\cos x\right)\ln x$.

9. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[3x]-[x]}{[2x]}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}[2e^x]$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left[\dfrac{1}{x^2}\right]$; **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\left[\dfrac{1}{x^2}\right]$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]}$ $(a,\ b\in\boldsymbol{R},\ a\ne 0)$.

10. Calculați:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+n}{n^2+4}\sin\dfrac{1}{n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right)$.

11. **a)** Arătați că funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x}$ nu este rațională.

b) Demonstrați că funcția $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$ nu este rațională.

Cazuri de nedeterminare

Cazul $\dfrac{0}{0}$

1. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-4x+3}$; **c)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3+x^2-x-1}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^3-3x+2}$;

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+4x^2+4x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$; **g)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+x^3-3x^2-5x-2}{x^4+5x^3+9x^2+7x+2}$.

2. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-2x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}-1}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}-3}{\sqrt{4x-3}-1}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^3-8}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x+1}}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{2x-1}}{x-1}$; **g)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+1}}{x^2+3x+2}$.

3. Fie $m,\ n\in\boldsymbol{R},\ m\geq 2$ și $n\geq 2$. Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{x+1}-\sqrt[n]{x+1}}{x}$.

4. Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R},\ a\geq 3$. Determinați a și b, astfel încât $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+a}-b}{x^2+x-2}=\dfrac{5}{18}$.

5. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 2x}{2x-\sin x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\sin 3x}{\sin x-\sin 2x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^4 x}{x\sin 2x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$.

6. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{4x-\pi}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+\cos 2x}{(\pi-2x)^2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(m\pi x)}{\sin(n\pi x)}$ $(m,\ n\in\boldsymbol{N}^*)$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2\sin 3x)}{x^2+2x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1-\cos 2x)}{\cos x-\cos 3x}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{\sin\left(\sqrt{x+3}-2\right)}$.

7. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}-e^x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-e}{4-x^2}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x}-e^{\sin x}}{e^x-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x^2+x+1}-8}{x^2-1}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\cos x-e^{x^2}}{x^2}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-\sqrt{x+1}}{x}$; **h)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\sqrt{x+1}-1}{x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3^{x-1}-x^2}{3x-9}$; **j)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x+1}-x^3}{x^2-4}$.

Cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$

1. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2-1}{2x^3+x+3}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+x^3+1}{-3x^3+x^2-2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+x+1}{x^4+x^2+2}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+x^2+1}{-3x^3+x+3}$; **e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+x^3-x+2}{x^3-2x^2+5}$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5+x^3-2x^2+3}{x^3-x^2+2x+1}$.

2. Fie $n\in N,\ n\geq 2$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n+x+2}{x^4+x^2-x+2}$.

3. Fie $n\in N,\ n\geq 2$. Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n+x-1}{2x^4+x^2+1}$.

4. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^4+x^3+1}}{x^2-x+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{\sqrt{x^2-x+1}}$; **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x^3+1}}{\sqrt{x^2-x+2}}$; **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}+e^x}{e^{2x}+2}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{2x+1}$; **g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^{3x})}{\ln(1+e^{2x})}$; **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2x^2+3x+3)}{\ln(x^3+2)}$.

Cazul $\infty-\infty$

1. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{9}{x(x-3)}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x^2+x}\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^4+x^2-1}{3x^3-1}-\dfrac{4x^2-1}{6x+2}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{6x^3+x^2-1}{3x+2}-2x^2+x\right)$; **e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3-x-2}{2x+1}-\dfrac{x^3}{2x-1}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1-x)(1-2x)(1-3x)-(x+1)(x+2)\right]$; **g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1-x)(1-2x)(1-3x)+6x^3\right]$.

2. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^x-2^x\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x^2}-e^{-x}\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x+1-\sqrt{x^2+2}\right)$; **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-3x\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}+2x\right)$; **g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}-3\sqrt{x}\right)$.

3. Fie $n \in N^*$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x}+...+\sqrt{x^2+nx}-nx\right)$.

4. Fie $a \in (0,\ \infty)$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+4x+2}-2x\right)$.

5. Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}+ax\right)$.

6. Determinați $a,\ b \in \boldsymbol{R}$, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-3}{x+1}+ax+b\right)=2$.

7. Determinați $a,\ b \in \boldsymbol{R}$, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax+1}{x-1}+\frac{bx^2-x+1}{x+1}\right)=3$.

8. Determinați $a,\ b \in \boldsymbol{R}$, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-3}+ax+b\right)=3$.

9. Determinați $a,\ b \in \boldsymbol{R}$, astfel încât $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}+ax+b\right)=\frac{1}{2}$.

Cazul $0\cdot\infty$

Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x+1}\sin\frac{1}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}x^3e^{\frac{1}{x}}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}x^3\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{e^{x^2}-1}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}-\sqrt{\frac{x}{x+4}}\right)$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)$.

Cazul 1^∞

1. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^x$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)^x$; **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{5x-2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{2x-x^2}}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; **g)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\cos x+2\cos^2 x\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\cos x\cos 3x\right)^{\frac{1}{(x-\pi)^2}}$.

2. Fie $a \in (0,\ 1)$. Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\left(a^x+(1-a)^x\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

3. Fie $a \in N^*$. Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\left(a^{x^2-1}+a^{2x^2-1}+...+a^{ax^2-1}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

4. Fie $m \in \boldsymbol{R}$ şi $f(m) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\cos x - \dfrac{|m|}{2} x^2 \right)^{\frac{2}{x^2}}$. Arătaţi că, oricare ar fi $m_1,\ m_2 \in \boldsymbol{R}$, are loc inegalitatea $f(m_1) f(m_2) \le \dfrac{1}{e} f(m_1 + m_2)$.

5. Fie $a \in (0,\ \infty)$, $b \in \boldsymbol{R}^*$ şi funcţia $f : (0,\ \infty) \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \left(\dfrac{ax+3}{x+1} \right)^{bx}$. Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

6. Determinaţi $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ ($a > 0$), astfel încât $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{ax+b}{2x-1} \right)^x = e^2$.

Răspunsuri

2. a) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \infty$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty,$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \infty$; **c)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x > \pi}} f(x) = -\infty$; **d)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty$ **3. a)** ∞; **b)** $-\infty$; **c)** nu există; **d)** 3; **e)** 1; **f)** nu există

4. a) $a = -4$ sau $a = 1$; **b)** $a = 2$; **c)** $a = 1$; **d)** $a = 0$; **e)** orice $a \in (-\infty,\ 0)$; **f)** orice $a \in (0,\ \infty)$

8. a) 0; **b)** 0; **c)** ∞; **d)** 0; **e)** 0; **f)** ∞; **g)** 2; **h)** $-\infty$ **9. a)** 1; **b)** 2; **c)** 1; **d)** ∞; **e)** $e^{\frac{b}{a}}$

10. a) 2; **b)** $\ln 3$; **c)** $\dfrac{1}{2}$.

Cazul $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$: **1. a)** $\dfrac{1}{4}$; **b)** 4; **c)** $\dfrac{3}{2}$; **d)** $\dfrac{1}{3}$; **e)** 2; **f)** $-\infty$; **g)** -3 **2. a)** $\dfrac{1}{8}$; **b)** 6; **c)** $\dfrac{7}{8}$; **d)** $\dfrac{1}{144}$; **e)** $\dfrac{2}{3}$; **f)** $\dfrac{5}{6}$; **g)** $-\dfrac{5}{6}$ **3.** $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}$ **4.** $a = 5,\ b = 3$ **5. a)** 6; **b)** 1 **c)** -5; **d)** 0; **e)** 1; **f)** 4; **g)** -1 **6. a)** $\dfrac{1}{4}$; **b)** $\dfrac{3}{8}$; **c)** $(-1)^{m-n} \dfrac{m}{n}$; **d)** 1; **e)** 3; **f)** $\dfrac{1}{2}$; **g)** 8 **7. a)** $\ln \dfrac{3}{2}$; **b)** 2; **c)** $\dfrac{e}{8}$; **d)** 2; **e)** $12 \ln 2$; **f)** $-\dfrac{1}{2}$; **g)** $\ln 2 - \dfrac{1}{2}$; **h)** $\ln 2 + \dfrac{1}{2}$; **i)** $3 \ln 3 - 2$; **j)** $2 \ln 2 - 3$.

Cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$: **1. a)** 2; **b)** $-\infty$; **c)** 0; **d)** $-\dfrac{2}{3}$; **e)** $-\infty$; **f)** ∞ **2.** 0 dacă $n \in \{2,\ 3\}$; 1 dacă $n = 4$; ∞ dacă $n \ge 5$ **3.** 0 dacă $n \in \{2,\ 3\}$; $\dfrac{1}{2}$ dacă $n = 4$; ∞ dacă $n \ge 5$ şi n număr par; $-\infty$ dacă $n \ge 5$ şi n număr impar **4. a)** 2; **b)** ∞; **c)** ∞; **d)** 0; **e)** ∞; **f)** $\dfrac{1}{2}$; **g)** $\dfrac{3}{2}$; **h)** -1; **i)** $\dfrac{2}{3}$.

Cazul $\infty-\infty$: **1. a)** 2; **b)** 3; **c)** $\frac{2}{9}$; **d)** $\frac{2}{3}$; **e)** ∞; **f)** $-\infty$; **g)** ∞ **2. a)** ∞; **b)** ∞; **c)** ∞; **d)** $-\infty$; **e)** $\frac{1}{2}$; **f)** $-\frac{3}{4}$; **g)** 2 **3.** $\frac{n(n+1)}{4}$ **4.** $-\infty$ dacă $a\in(0,\ 4)$; 1 dacă $a=4$; ∞ dacă $a\in(4,\ \infty)$ **5.** ∞ dacă $a\in(-\infty,\ 1)$; 1 dacă $a=1$; $-\infty$ dacă $a\in(1,\ \infty)$ **6.** $a=-1$ şi $b=1$ **7.** $a=2$ şi $b=-1$ **8.** $a=-1$ şi $b=1$ **9.** $a=2$ şi $b=1$

Cazul $0\cdot\infty$: **a)** 1; **b)** nu există; **c)** 0; **d)** $\frac{3}{2}$; **e)** $-\frac{1}{2}$.

Cazul 1^{∞}: **1. a)** e; **b)** e; **c)** e^{-1}; **d)** $\frac{1}{\sqrt{e}}$; **e)** e^{-2}; **f)** e^{4}; **g)** $e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$; **h)** e^{-5} **2.** $a^{a}(1-a)^{1-a}$ **3.** $\left(\sqrt{a}\right)^{a+1}$ **5.** ∞ dacă $a\in(0,\ 1)$ şi $b<0$; 0 dacă $a\in(0,\ 1)$ şi $b>0$; e^{2b} dacă $a=1$; 0 dacă $a\in(1,\ \infty)$ şi $b<0$; ∞ dacă $a\in(1,\ \infty)$ şi $b>0$ **6.** $a=2$ şi $b=3$.

§ 2. Asimptote

Probleme rezolvate

1. ***Determinați asimptotele graficului fiecăreia dintre funcțiile*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-2,\ 2\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$; **d)** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$.

Soluție: a) Întrucât f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Remarcând că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, deducem că dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală a lui G_f atât pentru ramura spre $+\infty$, cât și pentru ramura spre $-\infty$.

b) Având în vedere că -1 este punct de acumulare (finit) al lui $\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$ și, totodată, $-1\notin\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$, este necesar să studiem existența asimptotei verticale la G_f în punctul -1. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\infty$, rezultă că dreapta având ecuația $x+1=0$ este asimptota verticală a lui G_f. Remarcând că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x}{x+1}=-1$, deducem că dreapta de ecuație $y=x-1$ este asimptota oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Observând că f este funcție rațională, conchidem că dreapta $y=x-1$ este asimptota oblică și la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

c) Deoarece -2 și 2 sunt puncte de acumulare (finite) ale lui D_f (D_f reprezintă domeniul de definiție al lui f), este necesar să cercetăm dacă există asimptote verticale în aceste puncte. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=\infty$, rezultă că dreptele de ecuație $x+2=0$, respectiv $x-2=0$ sunt asimptote verticale pentru G_f. Remarcând că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, deducem că dreapta de ecuație $y-1=0$ este asimptotă orizontală a lui G_f atât pentru ramura spre $-\infty$, cât și pentru ramura spre $+\infty$.

d) Evident, -1 și 1 sunt puncte de acumulare (finite) ale lui D_f și nu aparțin lui D_f. Ținând seama de faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\infty$, deducem că dreptele $x+1=0$ și $x-1=0$ sunt asimptote verticale ale lui G_f. Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-2x\big)=0$, rezultă că dreapta $y=2x$ este asimptota oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Remarcând că f este funcție rațională, conchidem că dreapta $y=2x$ este asimptota oblică și la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

2. ***Determinați asimptotele graficului fiecăreia dintre funcțiile*:**

a) $f:(-\infty,\ -3]\cup[3,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt{x^2-9}$; **b)** $f:(-1,\ 1)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; **d)** $f:(-\infty,\ -2)\cup(2,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}$.

Soluție: a) Deoarece funcția f este continuă pe D_f, iar D_f nu are nici un punct de acumulare (finit) care să

nu-i aparţină, rezultă că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Evidenţiind faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x}=0$, deducem că dreapta $y=x$ este asimptota oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Analog, arătăm că dreapta $y=-x$ este asimptota oblică la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

b) Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\infty$, rezultă că dreptele având ecuaţiile $x+1=0$, respectiv $x-1=0$ sunt asimptote verticale pentru G_f. Remarcând că domeniul de definiţie a funcţiei f este o mulţime mărginită, nu are sens să studiem asimptotele oblice ale lui G_f.

c) Având în vedere că funcţia f este continuă pe R, deducem că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, rezultă că dreapta de ecuaţie $y-1=0$ este asimptota orizontală la ramura spre ∞ a lui G_f. Analog, arătăm că dreapta $y+1=0$ este asimptota orizontală la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

d) Cum $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=\infty$, rezultă că dreptele având ecuaţiile $x+2=0$, respectiv $x-2=0$ sunt asimptote verticale ale lui G_f. Remarcând că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1-2x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{20x^2+1}{\sqrt{x^2-4}\left(2x^2+1+2x\sqrt{x^2-4}\right)}=0$, deducem că dreapta având ecuaţia $y=2x$ este asimptota oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Analog, arătăm că dreapta $y=-2x$ este asimptota oblică la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

3. ***Determinaţi asimptotele graficului fiecăreia dintre funcţiile*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$.

Soluţie: a) Întrucât f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, graficul lui f nu are nici o asimptotă verticală. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$, deducem că dreapta având ecuaţia $y=2x$ este asimptota oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$, rezultă că dreapta având ecuaţia $y=0$ este asimptota orizontală la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

b) Deoarece f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, graficul lui f nu are nici o asimptotă verticală. Remarcând că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1$, deducem că dreapta de ecuaţie $y=x+1$ este asimptota oblică la ramura spre $+\infty$ a lui G_f. Din faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-1$, rezultă că dreapta de ecuaţie $y=x-1$ este asimptota oblică la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

c) Evident, G_f nu are nici o asimptotă verticală. Ţinând seama că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}=1$, deducem că dreapta de

ecuație $y = x + 1$ este asimptota oblică la ramura spre $+\infty$ a lui G_f. Analog, arătăm că această dreaptă este şi asimptota oblică la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

4. ***Determinați asimptotele graficului fiecăreia dintre funcțiile*:**

a) $f : \boldsymbol{R} \setminus \{-1\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{|x|(x-1)}{x+1}$; **b)** $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$;

c) $f : (0,\ e) \cup (e,\ \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln x - 1}$; **d)** $f : \boldsymbol{R} \setminus \{0,\ 2\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln|x-2|}{x}$.

Soluție: a) Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$, deducem că dreapta de ecuație $x + 1 = 0$ este asimptota verticală a lui G_f. Deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - x\big) =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2x}{x+1} = -2$, rezultă că dreapta de ecuație $y = x - 2$ este asimptota oblică la ramura spre $+\infty$ a lui G_f. Analog,arătăm că dreapta de ecuație $y = -x + 2$ este asimptota oblică la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

b) Din faptul că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, deducem că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Întrucât $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = 2$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - 2x\big) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right) = 0$, rezultă că dreapta de ecuație $y = 2x$ este asimptota oblică la ramura spre $+\infty$ a lui G_f. Remarcând că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 0$, deducem că dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

c) Evidențiind faptul că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$, iar $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x < e}} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} f(x) = \infty$, deducem că numai dreapta de ecuație $x - e = 0$ este asimptotă verticală la G_f. Cum $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\ln x}} = 1$, rezultă că dreapta de ecuație $y - 1 = 0$ este asimptota orizontală la ramura spre $+\infty$ a lui G_f.

d) Ținând seama de faptul că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty$, iar $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$, deducem că dreptele având ecuațiile $x = 0$, respectiv $x - 2 = 0$ sunt asimptotele verticale ale lui G_f. Deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, rezultă că dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală a lui G_f atât la ramura spre $-\infty$, cât şi la ramura spre $+\infty$.

5. ***Determinați asimptotele graficului fiecăreia dintre funcțiile*:**

a) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x$; **b)** $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \arcsin \dfrac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$;

c) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x\left(1 + e^{-x}\right)$; **d)** $f : \boldsymbol{R} \setminus \{1\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}}$;

e) $f : \boldsymbol{R} \setminus \{0,\ 1\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$.

Soluție: a) Evident, G_f nu are nici o asimptotă verticală. Deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - x\big) = \lim\limits_{x \to \infty} 2 \operatorname{arctg} x = \pi$, rezultă că dreapta $y = x + \pi$ este asimptota oblică la ramura spre $+\infty$ a lui G_f. Analog, arătăm că dreaptă $y = x - \pi$ este asimptota oblică la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

b) G_f nu are nici o asimptotă verticală. Remarcând că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{\pi}{4}$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{\pi}{4}$, rezultă că dreapta $y=-\dfrac{\pi}{4}$ este asimptota orizontală la ramura spre $-\infty$ a lui G_f, iar dreapta $y=\dfrac{\pi}{4}$ este asimptota orizontală la ramura spre $+\infty$ a lui G_f.

c) Remarcăm, mai întâi, că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+e^{-x}\right)=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$, rezultă că dreapta $y=x$ este asimptota oblică la ramura spre $+\infty$ a lui G_f. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+e^{-x}\right)=\infty$, conchidem că G_f nu are asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$.

d) Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=0$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\infty$, rezultă că dreapta $x-1=0$ este asimptota verticală (la dreapta) a lui G_f. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, iar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, deducem că G_f nu are asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$, iar dreapta $y=0$ este asimptota orizontală la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

e) Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\infty$, rezultă că dreapta $x=1$ este asimptotă verticală a lui G_f. Din faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=0$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$, deducem că dreapta $x=0$ este asimptotă verticală (la dreapta) a lui G_f. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, rezultă că dreapta $y=1$ este asimptota orizontală la G_f atât pentru ramura spre $-\infty$, cât şi pentru ramura spre $+\infty$.

6. ***Fie*** $a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$ $(a>0,\ c<0)$ ***şi funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{|ax^2+bx+c|}{x-1}$***. Determinaţi*** $a,\ b$ ***şi*** c***, astfel încât*** $f(0)=-2$***, iar dreapta*** h ***având ecuaţia*** $y=x+2$ ***să fie asimptota oblică la ramura spre*** $+\infty$ ***a lui*** G_f***.***

Soluţie: Deoarece $f(0)=-|c|$ şi, totodată, $f(0)=-2$, rezultă că $|c|=2$, de unde $c=-2$ (căci $c<0$). Evidenţiind faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=|a|=a$ (fiindcă $a>0$), iar $m_h=1$, deducem că $a=1$. Deci, $f(x)=\dfrac{|x^2+bx-2|}{x-1}$. Cum, într-o vecinătate a lui $+\infty$, $x^2+bx-2>0$, rezultă că $f(x)=\dfrac{x^2+bx-2}{x-1}$. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(b+1)x-2}{x-1}=b+1$, deducem că $b+1=2$, de unde $b=1$. Deci, $a=b=1$ şi $c=-2$.

7. ***Determinaţi, în funcţie de valorile lui*** $n\in\boldsymbol{N}^*$***, asimptotele graficului funcţiei*** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}\to\boldsymbol{R}$***,*** $f(x)=\dfrac{x^n+1}{x^3+1}$***.***

Soluţie: 1) Dacă $n=1$, atunci $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}$ (oricare ar fi $x\neq-1$). În acest caz, G_f are doar o singură asimptotă, şi anume, dreapta de ecuaţie $y=0$.

2) Fie $n=2$. Atunci, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f(x)=-\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x)=\infty$, rezultă că dreapta de ecuaţie $x+1=0$ este asimptota verticală a lui G_f. Remarcând că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$,

deducem că dreapta $y=0$ este asimptota orizontală a lui G_f atât pentru ramura spre $-\infty$, cât şi pentru ramura spre $+\infty$.

3) Dacă $n=3$, atunci $f(x)=1$ (oricare ar fi $x\neq -1$), ceea ce arată că, în cazul considerat, G_f are asimptota $y=1$ atât pentru ramura spre $-\infty$, cât şi pentru ramura spre $+\infty$.

4) Fie $n=4$. Atunci, $f(x)=\dfrac{x^4+1}{(x+1)(x^2-x+1)}$. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=-\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\infty$, rezultă că dreapta de ecuație $x+1=0$ este asimptota verticală a lui G_f. Evidențiind faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=0$, deducem că dreapta $y=x$ este asimptota oblică la ramura spre $+\infty$ a lui G_f. Remarcând că f este funcție rațională, conchidem că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică şi la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

5) Fie $n\geq 5$. Dacă n este număr natural impar, atunci G_f nu are nici o asimptotă. Dacă n este număr natural par, atunci dreapta de ecuație $x+1=0$ este asimptota verticală a lui G_f. Se observă cu uşurință că G_f nu are asimptotă oblică nici la ramura spre $+\infty$ şi nici la ramura spre $-\infty$.

8. ***Fie*** $m\in \boldsymbol{R}$ ***şi funcția*** $f:D\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+mx+3}{x^2+mx+4}$ ***(D notează domeniul maxim pe care poate fi definită funcția). Determinați, în funcție de valorile lui*** m, ***asimptotele graficului funcției*** f.

Soluție: Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$, rezultă că, oricare ar fi $m\in \boldsymbol{R}$, dreapta de ecuație $y=2$ este asimptota orizontală atât la ramura spre $-\infty$, cât şi la ramura spre $+\infty$ ale lui G_f. Rămâne să stabilim asimptotele verticale ale lui G_f. Evident, ecuația $x^2+mx+4=0$ are rădăcini reale dacă şi numai dacă $m^2-16\geq 0$, de unde $m\in(-\infty,\ -4]\cup[4,\ \infty)$.

1) Dacă $m\in(-4,\ 4)$, atunci $D=\boldsymbol{R}$, iar G_f nu are nici o asimptotă verticală.

2) Dacă $m=-4$, atunci $f(x)=\dfrac{2x^2-4x+3}{(x-2)^2}$. În acest caz, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$, iar dreapta $x=2$ este asimptota verticală a lui G_f.

3) Dacă $m=4$, atunci $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{(x+2)^2}$. În acest caz, dreapta $x=-2$ este asimptota verticală a lui G_f.

4) Fie $m\in(-\infty,\ -4)\cup(4,\ \infty)$. Atunci, ecuația $x^2+mx+4=0$ are două rădăcini reale şi distincte ; fie acestea $x_1,\ x_2$ $(x_1<x_2)$. În acest caz, $D=R\setminus\{x_1,\ x_2\}$. Rămâne să determinăm valorile lui m pentru care ecuațiile $2x^2+mx+3=0$ şi $x^2+mx+4=0$ au cel puțin o rădăcină reală comună. Se arată cu uşurință că aceasta are loc dacă $m=-5$ sau $m=5$.

a) Dacă $m\in(-\infty,\ -5)\cup(-5,\ -4)\cup(4,\ 5)\cup(5,\ \infty)$, atunci G_f are două asimptote verticale, şi anume, dreptele $x=x_1$, $x=x_2$.

b) Dacă $m=-5$, atunci $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-5x+4}=\dfrac{2x-3}{x-4}$, iar $D=\boldsymbol{R}\setminus\{1,\ 4\}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x)=-\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x)=\infty$, rezultă că dreapta de ecuație $x=4$ este asimptota verticală a lui G_f.

c) Dacă $m=5$, atunci $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}$, iar $D=\boldsymbol{R}\setminus\{-4,\ -1\}$. În acest caz, dreapta $x=-4$ este asimptota verticală a lui G_f.

Probleme propuse

1. Determinați asimptotele graficului fiecăreia dintre funcțiile:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+4}$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{2\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2}$; **d)** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 2\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-x-2}$;

e) $f:(-\infty,\ -2]\cup[2,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

2. Determinați asimptotele graficului fiecăreia dintre funcțiile:

a) $f:(-3,\ 3)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{9-x^2}}$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$;

c) $f:(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2-1}}$; **d)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$.

3. Determinați asimptotele graficului fiecăreia dintre funcțiile:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3+x}$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x-\sqrt{\ |x-1|\ }$;

c) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{|x|(x+1)}{x-1}$; **d)** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;

e) $f:(-2,\ 2)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$.

4. Determinați asimptotele graficului fiecăreia dintre funcțiile:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x-2\ \text{arctg}\,x$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=1+e^{-x^2}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x\left(2-e^{-x}\right)$; **d)** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^{\frac{x^2}{x+1}}$;

e) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{0,\ 2\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}e^{\frac{1}{x}}$.

5. Determinați $a,\ b\in\boldsymbol{R}$, știind că dreapta h având ecuația $y=x+1$ este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ a graficului funcției $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Răspunsuri

1. a) nu are asimptote verticale, iar $y=0$ este asimptotă orizontală atât la ramura spre $-\infty$, cât și la ramura spre $+\infty$; **b)** $x-2=0$ este asimptota verticală, iar $y=x+3$ este asimptotă oblică atât la ramura spre $-\infty$, cât și la ramura spre $+\infty$; **c)** $x-1=0$ este asimptota verticală, iar $y-2=0$ este asimptotă orizontală atât la ramura spre $-\infty$, cât și la ramura spre $+\infty$; **d)** $x+1=0$ și $x-2=0$ sunt asimptote verticale, iar $y-1=0$ este asimptotă orizontală atât la ramura spre $-\infty$, cât și la ramura spre $+\infty$; **e)** nu are asimptote verticale, iar $y=-x$ este asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$ și $y=x$ este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ **2. a)** $x+3=0$ și $x-3=0$ sunt asimptote verticale; **b)** nu are asimptote verticale, iar $y+1=0$ este asimptotă orizontală la ramura spre $-\infty$ și $y-1=0$ este asimptotă orizontală la ramura spre $+\infty$;

c) $x+1=0$ şi $x-1=0$ sunt asimptote verticale, iar $y=-x$ este asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$ şi $y=x$ este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$; **d)** nu are asimptote verticale, iar $y=2x$ este asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$ şi $y=0$ este asimptotă orizontală la ramura spre $+\infty$; **e)** nu are asimptote verticale, iar $y=x+2$ este asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$ şi $y=x-2$ este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ **3. a)** nu are asimptote verticale, iar $y=x$ este asimptotă oblică atât la ramura spre $-\infty$, cât şi la ramura spre $+\infty$; **b)** nu are asimptote verticale şi nici asimptote oblice; **c)** $x-1=0$ este asimptota verticală, iar $y=-x-2$ este asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$ şi $y=x+2$ este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$; **d)** $x=0$ este asimptota verticală, iar $y=0$ este asimptota orizontală la ramura spre $+\infty$; **e)** $x+2=0$ şi $x-2=0$ sunt asimptote verticale **4. a)** nu are asimptote verticale, iar $y=x+\pi$ este asimptota oblică la ramura spre $-\infty$ şi $y=x-\pi$ este asimptota oblică la ramura spre $+\infty$; **b)** nu are asimptotă verticală, iar $y-1=0$ este asimptotă orizontală atât la ramura spre $-\infty$, cât şi la ramura spre $+\infty$; **c)** nu are asimptotă verticală şi nici asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$, iar $y=2x$ este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$; **d)** $x+1=0$ este asimptota verticală (la dreapta), iar $y=0$ este asimptotă orizontală la ramura spre $-\infty$; **e)** $x=0$ este asimptota verticală (la dreapta) şi $x-2=0$ este asimptotă verticală, iar $y-1=0$ este asimptotă orizontală atât la ramura spre $-\infty$, cât şi la ramura spre $+\infty$ **5.** $a=b=1$.

CAPITOLUL VIII

FUNCȚII CONTINUE

Probleme rezolvate

1. ***Studiați continuitatea următoarelor funcții în punctul indicat în dreptul fiecăreia dintre ele*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & ,\ x\in(-\infty,\ 2]\\ x+1 & ,\ x\in(2,\ \infty)\end{cases}$ ***în*** $x=2$**;**

b) $f:[1,\ 6]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x-1 & ,\ x\in[1,\ 2]\\ 3x-5 & ,\ x\in(2,\ 5]\\ 2x+1 & ,\ x\in(5,\ 6]\end{cases}$ ***în*** $x=2$ ***şi în*** $x=5$**;**

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}3x-7 & ,\ x\in(-\infty,\ 3]\\ \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & ,\ x\in(3,\ \infty)\end{cases}$ ***în*** $x=3$**;**

d) $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\left[\sqrt{x}\right]$ **în** $x=4$**;**

e) $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{|\sin x|}{x} & ,\ x\neq 0\\ -1 & ,\ x=0\end{cases}$ **în** $x=0$**;**

f) $f:\left[-1,\ 1\right]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin x}{|x|} & ,\ x\neq 0\\ 1 & ,\ x=0\end{cases}$ ***în*** $x=0$**;**

g) $f:\left(-\pi,\ \pi\right)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3\sin\dfrac{1}{x}}{\sin^2 x} & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$ ***în*** $x=0$**.**

Soluție: a) Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(2x-1)=3$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x+1)=3$ şi $f(2)=3$, rezultă că f este continuă în $x=2$.

b) Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x-1)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(3x-5)=1$ şi $f(2)=1$, deducem că f este continuă în $x=2$. Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}}(3x-5)=10$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}}(2x+1)=11$, rezultă că f este discontinuă în $x=5$ şi că 5 este punct de discontinuitate de speța întâi. Ținând seama de faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} f(x)=f(5)$, conchidem că f este continuă la stânga în $x=5$.

c) Evidențiind faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}(3x-7)=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}(x-1)=2$ şi $f(3)=2$, deducem că f este continuă în $x=3$.

d) Remarcăm, mai întâi, că dacă $x\in[1,\ 4)$, atunci $f(x)=1$ şi că dacă $x\in[4,\ 9)$, atunci $f(x)=2$. Prin urmare, $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x)=1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x)=2$, ceea ce arată că f este discontinuă în $x=4$. Observăm şi faptul că f este continuă la dreapta în $x=4$.

e) Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\sin x}{x}=-1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin x}{x}=1$, rezultă că f este discontinuă în $x=0$ şi că 0 este punct de discontinuitate de speţa întâi. Remarcăm şi faptul că f este continuă la stânga în $x=0$.

f) Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\arcsin x}{x}=-1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\arcsin x}{x}=1$ şi $f(0)=1$, rezultă că f este continuă la dreapta în $x=0$.

g) Deoarece $|f(x)|=\left|\dfrac{x^2}{\sin^2 x}x\sin\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{x^2}{\sin^2 x}|x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le\dfrac{x^2}{\sin^2 x}|x|$ (oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}^*$) şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}|x|=0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Totodată, $f(0)=0$. Deci, f este continuă în $x=0$.

2. ***Studiaţi continuitatea funcţiei*** $f:[-1,\ 1)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x\big(x+[x]\big)$ ***în*** $x=0$.

Soluţie: Deoarece $[x]=-1$, oricare ar fi $x\in[-1,\ 0)$ şi $[x]=0$, oricare ar fi $x\in[0,\ 1)$, rezultă că $f(x)=\begin{cases}x(x-1) & ,\ x\in[-1,\ 0)\\ 0 & ,\ x=0\\ x^2 & ,\ x\in(0,\ 1]\end{cases}$. Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x(x-1)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2=0$ şi că $f(0)=0$, deducem că f este continuă în $x=0$.

3. ***Arătaţi că funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\left[\dfrac{1}{x}\right] & ,\ x\ne 0\\ 1 & ,\ x=0\end{cases}$ ***este continuă în*** $x=0$.

Soluţie: Evident, $\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\le\dfrac{1}{x}$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}^*$. Dacă $x>0$, atunci $1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1-x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1=1$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$, de unde $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1$. Dacă $x<0$, atunci $1\le x\left[\dfrac{1}{x}\right]<1-x$. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(1-x)=1$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$, de unde $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=1$. Drept urmare $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)$, ceea ce arată că funcţia f este continuă în $x=0$.

4. ***Se consideră funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ***cu proprietatea că*** $|f(x)-\cos x|\le|\sin x|$, ***oricare ar fi*** $x\in\boldsymbol{R}$. ***Arătaţi că*** $f(0)=1$ ***şi că*** f ***este continuă în*** $x=0$.

Soluţie: Pentru $x=0$, inegalitatea din enunţ devine $|f(0)-1|\le 0$. Cum $|f(0)-1|\ge 0$, rezultă că $|f(0)-1|=0$, de unde $f(0)=1$. Remarcând faptul că $|f(x)-f(0)|=|f(x)-1|=$ $=|f(x)-\cos x+\cos x-1|\le|f(x)-\cos x|+|\cos x-1|\le|\sin x|+|\cos x-1|$ (oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$) şi că $\lim\limits_{x\to 0}\big(|\sin x|+|\cos x-1|\big)=0$, deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)-f(0)\big)=0$, ceea ce conduce la $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Deci, f este continuă în $x=0$.

5. ***Arătaţi că, oricare ar fi*** $a\in\boldsymbol{R}$, ***funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1} & ,\ x\ne 1\\ a & ,\ x=1\end{cases}$ ***are în*** $x=1$ ***o discontinuitate de speţa întâi.***

Soluție: Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1}=-\infty$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\frac{\pi}{2}$. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1}=\infty$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\frac{\pi}{2}$. Drept urmare, f este discontinuă în $x=1$, iar 1 este punct de discontinuitate de speța întâi (oricare ar fi $a\in \boldsymbol{R}$).

6. **a)** ***Arătați că funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x} & ,\ x\neq 0\\ 1 & ,\ x=0\end{cases}$ ***are în*** $x=0$ ***o discontinuitate de speța a doua.***

b) ***Demonstrați că funcția*** $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x^2-1} & ,\ x\in[0,\ 1)\\ 1 & ,\ x=1\\ e^{\frac{1}{x-1}} & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$ ***are în*** $x=1$ ***o discontinuitate de speța a doua.***

c) ***Arătați că, oricare ar fi*** $a\in\boldsymbol{R}$***, funcția*** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\left[\frac{1}{\ln x}\right] & ,\ x\neq 1\\ a & ,\ x=1\end{cases}$ ***are în*** $x=1$ ***o discontinuitate de speța a doua.***

Soluție: **a)** Să considerăm şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(x'_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $x'_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$. Evident, $x_n\to 0$ şi $x'_n\to 0$. Remarcând faptul că $f(x_n)=\cos 2n\pi=1$, iar $f(x'_n)=\cos(2n\pi+\pi)=\cos\pi=-1$, deducem că $f(x_n)\to 1$, iar $f(x'_n)\to -1$, ceea ce arată că f nu are limită în $x=0$. Deci, $x=0$ este punct de discontinuitate (de speța a doua) pentru funcția *f*.

b) Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2}{x^2-1}=-\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$, rezultă că $x=1$ este punct de discontinuitate (de speța a doua) pentru funcția *f*.

c) Evident, $\frac{1}{\ln x}-1<\left[\frac{1}{\ln x}\right]\leq\frac{1}{\ln x}$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$. Cum $f(x)\leq\frac{1}{\ln x}$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1)$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{\ln x}=-\infty$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$. Remarcând că $f(x)>\frac{1}{\ln x}-1$, oricare ar fi $x\in(1,\ \infty)$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\frac{1}{\ln x}-1\right)=\infty$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\infty$. Drept urmare, $x=1$ este punct de discontinuitate (de speța a doua) pentru funcția *f*.

7. ***Se consideră funcțiile*** $f,\ g:D\to\boldsymbol{R}$ ***şi*** $x_0\in D$ ***un punct de acumulare al lui f. Dacă f şi g sunt discontinue în*** x_0***, ce se poate spune despre continuitatea lui*** $f+g$ ***în*** x_0***?***

Soluție: **1)** Fie funcțiile $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-1 & ,\ x\in(-\infty,\ 1)\\ 1 & ,\ x=1\\ x-1 & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1-x & ,\ x\in(-\infty,\ 1)\\ -1 & ,\ x=1\\ 1-\frac{1}{x} & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x^2-1)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1)=0$ şi $f(1)=1$, rezultă că f este discontinuă în $x=1$. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(1-\frac{1}{x}\right)=0$ şi $g(1)=-1$, deducem că g este discontinuă în $x=1$. Evident, $f+g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $(f+g)(x)=\begin{cases} x^2-x & ,\ x\in(-\infty,\ 1)\\ 0 & ,\ x=1\\ x-\frac{1}{x} & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$.

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (f+g)(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x^2-x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (f+g)(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(x-\frac{1}{x}\right)=0$ şi $(f+g)(1)=0$, rezultă că $f+g$ este continuă în $x=1$.

2) Să considerăm funcţiile $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1 & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ x-2 & ,\ x\in[0,\ \infty)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -x & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ x+1 & ,\ x\in[0,\ \infty)\end{cases}$.

Se arată cu uşurinţă că atât f, cât şi g sunt discontinue în $x=0$. Evident, $(f+g)(x)=\begin{cases} 1 & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ 2x-1 & ,\ x\in[0,\ \infty)\end{cases}$. Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (f+g)(x)=1$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (f+g)(x)=-1$, deducem că $f+g$ este discontinuă în $x=0$.

Ca urmare a celor stabilite în exemplele 1) şi 2), conchidem că, dacă f şi g sunt discontinue în x_0, despre continuitatea lui $f+g$ în x_0 nu se poate spune nimic.

8. ***Se consideră funcţiile*** $f,\ g:D\to\boldsymbol{R}$ ***şi*** $x_0\in D$ ***un punct de acumulare al lui*** f. ***Dacă*** f ***este continuă în*** x_0, ***iar*** g ***este discontinuă în*** x_0, ***ce se poate spune despre continuitatea lui*** fg ***în*** x_0 **?**

Soluţie: 1) Fie funcţiile $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-1 & ,\ x\neq 1\\ 0 & ,\ x=1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x-1 & ,\ x\neq 1\\ 2 & ,\ x=1\end{cases}$. Întrucât $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} (x-1)=0$ şi $f(1)=0$, rezultă că f este continuă în $x=1$. Remarcând că $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=$ $=\lim\limits_{x\to 1} (x-1)=0$ şi $g(1)=2$, deducem că g este discontinuă în $x=1$. Evident, $fg:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $(fg)(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & ,\ x\neq 1\\ 0 & ,\ x=1\end{cases}$. Cum $\lim\limits_{x\to 1} (fg)(x)=\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2=0$ şi $(fg)(1)=0$, rezultă că fg este continuă în $x=1$.

2) Fie funcţiile $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1 & ,\ x\neq 1\\ 2 & ,\ x=1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x-1 & ,\ x\neq 1\\ 1 & ,\ x=1\end{cases}$. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} (x+1)=2$ şi $f(1)=2$, deducem că f este continuă în $x=1$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=$ $=\lim\limits_{x\to 1} (x-1)=0$ şi $g(1)=1$, rezultă că g este discontinuă în $x=1$. Evident, $fg:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $(fg)(x)=\begin{cases} x^2-1 & ,\ x\neq 1\\ 2 & ,\ x=1\end{cases}$. Remarcând că $\lim\limits_{x\to 1} (fg)(x)=\lim\limits_{x\to 1} (x^2-1)=0$ şi $(fg)(1)=2$, deducem că fg este discontinuă în $x=1$.

Ţinând seama de cele stabilite în exemplele 1) şi 2), conchidem că, dacă f este continuă în x_0 şi g este discontinuă în x_0, despre continuitatea lui fg în x_0 nu se poate spune nimic.

9. ***Se consideră funcţiile*** $f,\ g:D\to\boldsymbol{R}$ ***şi*** $x_0\in D$ ***un punct de acumulare al lui*** D. ***Dacă*** f ***şi*** g ***sunt discontinue în*** x_0, ***ce se poate spune despre continuitatea lui*** fg ***în*** x_0 **?**

Soluție: 1) Fie funcțiile $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\begin{cases}x & ,\ x\neq -1\\ 2 & ,\ x=-1\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x+1 & ,\ x\neq -1\\ 1 & ,\ x=-1\end{cases}$. Remarcând că $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-1$, iar $f(-1)=2$, deducem că f este discontinuă în $x=-1$. Deoarece $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=0$, iar $g(-1)=1$, rezultă că g este discontinuă în $x=-1$. Evident, $f\,g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $(f\,g)(x)=\begin{cases}x^2+x & ,\ x\neq -1\\ 2 & ,\ x=-1\end{cases}$. Ținând seama că $\lim\limits_{x\to -1}(f\,g)(x)=0$ și $(f\,g)(-1)=2$, deducem că $f\,g$ este discontinuă în $x=-1$.

2) Fie funcțiile $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & ,\ x\neq 2\\ 2 & ,\ x=2\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}2x-3 & ,\ x\neq 2\\ \dfrac{1}{2} & ,\ x=2\end{cases}$. Se arată cu ușurință că atât f, cât și g sunt discontinue în $x=2$. Remarcăm și faptul că, $f\,g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $(f\,g)(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x}{2} & ,\ x\neq 2\\ 1 & ,\ x=2\end{cases}$. Cum $\lim\limits_{x\to 2}(f\,g)(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x}{2}=1$ și $(f\,g)(2)=1$, rezultă că $f\,g$ este continuă în $x=2$.

Având în vedere cele stabilite în exemplele 1) și 2), conchidem că, dacă f și g sunt discontinue în x_0, despre continuitatea lui $f\,g$ în x_0 nu se poate spune nimic.

10. ***Arătați că, oricare ar fi*** $a\in\boldsymbol{R}$***, funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x} & ,\ x\in(-\infty,\ -1]\cup[1,\ \infty)\\ a\sin\pi x & ,\ x\in(-1,\ 1)\end{cases}$ ***este continuă pe*** $\boldsymbol{R}$.

Soluție: Dacă $x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)$, atunci $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$. Cum, în acest caz, f este restricția unei funcții raționale, ea este continuă. Dacă $x\in(-1,\ 1)$, atunci $f(x)=a\sin\pi x$, care este o funcție continuă (fiind produsul dintre o constantă și o restricție a funcției sin). Rămâne să analizăm continuitatea lui f în $x=-1$ și în $x=1$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\dfrac{x^2-1}{x}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} a\sin\pi x=0$ (oricare ar fi $a\in\boldsymbol{R}$) și $f(-1)=0$, rezultă că f este continuă în $x=-1$. Analog, arătăm că f este continuă în $x=1$. Deci, f este continuă pe $\boldsymbol{R}$.

11. ***Studiați continuitatea fiecăreia dintre funcțiile*****:**

a) $f:[0,\ 4]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}3x-2 & ,\ x\in[0,\ 1]\\ 2x^2-1 & ,\ x\in(1,\ 2]\\ \dfrac{3x-6}{x^2-3x+2} & ,\ x\in(2,\ 4]\end{cases}$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\max\left(x^2,\ 4x-3\right)$;

c) $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-3x+2} & ,\ x\in[0,\ 1)\\ -\dfrac{1}{2} & ,\ x=1\\ \dfrac{2(1-x)}{x^2+2x-3} & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$.

Soluție: a) Dacă $x\in[0,\ 1)$, atunci $f(x)=3x-2$, care este funcție continuă (fiind restricția unei funcții

polinomiale). Dacă $x \in (1,\ 2)$, atunci $f(x) = 2x^2 - 1$, care este funcție continuă (fiind restricția unei funcții polinomiale). Dacă $x \in (2,\ 4]$, atunci $f(x) = \dfrac{3x-6}{x^2-3x+2}$, care este funcție continuă (fiind restricția unei funcții raționale). Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (3x-2) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (2x^2-1) = 1$ și $f(1) = 1$, rezultă că f este continuă în $x = 1$. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (2x^2-1) = 7$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{3(x-2)}{(x-2)(x-1)} =$ $= \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{3}{x-1} = 3$, deducem că f este discontinuă în $x = 2$ și că 2 este punct de discontinuitate de speța întâi. Deci, f este continuă pe $[0,\ 2) \cup (2,\ 4]$.

b) Fie $g(x) = x^2 - (4x-3) = x^2 - 4x + 3$. Cum $g(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in (-\infty,\ 1] \cup [3,\ \infty)$, iar $g(x) < 0$, oricare ar fi $x \in (1,\ 3)$, rezultă că $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty,\ 1] \cup [3,\ \infty) \\ 4x-3, & x \in (1,\ 3) \end{cases}$. Se arată cu ușurință că f este continuă atât pe $(-\infty,\ 1) \cup (3,\ \infty)$, cât și pe $(1,\ 3)$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2 = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) =$ $= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (4x-3) = 1$ și $f(1) = 1$, rezultă că f este continuă în $x = 1$. Analog, se arată că f este continuă în $x = 3$. Prin urmare, f este continuă pe $\boldsymbol{R}$.

c) Dacă $x \in [0,\ 1)$, atunci $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-3x+2}$, care este funcție continuă (fiind raportul a două funcții continue). Dacă $x \in (1,\ \infty)$, atunci $f(x) = \dfrac{2(1-x)}{x^2+2x-3}$, care este funcție continuă (fiind restricția unei funcții raționale). Ținând seama că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x+1}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = -\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{2(1-x)}{x^2+2x-3} = -\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{2}{x+3} = -\dfrac{1}{2}$ și $f(1) = -\dfrac{1}{2}$, deducem că f este continuă în $x = 1$. Drept urmare, f este continuă pe $[0,\ \infty)$.

12. ***Studiați continuitatea fiecăreia dintre funcțiile*:**

a) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4^x - 16}{2^{x+1} - 8}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$;

b) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3x}{2x-x^2}, & x \in (-\infty,\ 0) \\ -1, & x = 0 \\ \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, & x \in (0,\ \infty) \end{cases}$;

c) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}, & x \in (-\infty,\ -1) \\ 1, & x = -1 \\ \dfrac{\ln(x+2)}{x+1}, & x \in (-1,\ \infty) \end{cases}$.

Soluție: a) Dacă $x \in (-\infty,\ 2) \cup (2,\ \infty)$, atunci $f(x) = \dfrac{4^x - 16}{2^{x+1} - 8}$, care este funcție continuă (fiind raportul a

două funcții continue). Cum $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4^x-16}{2^{x+1}-8}=2\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4^{x-2}-1}{2^{x-2}-1}=2\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{4^{x-2}-1}{x-2}}{\dfrac{2^{x-2}-1}{x-2}}=2\dfrac{\ln 4}{\ln 2}=4$, iar $f(2)=4$, rezultă că f este continuă în $x=2$. Deci, funcția f este continuă pe $\boldsymbol{R}$.

b) Se arată cu ușurință că f este continuă atât pe $(-\infty,\ 0)$, cât și pe $(0,\ \infty)$. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{2x^2+3x}{2x-x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{2x+3}{2-x}=\dfrac{3}{2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=$

$=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$, iar $f(0)=-1$, deducem că f este discontinuă în $x=0$, iar 0 este punct de discontinuitate de speța întâi a lui *f*. Drept urmare, funcția f este continuă pe $\boldsymbol{R}^*$.

c) Evident, f este continuă atât pe $(-\infty,\ -1)$, cât și pe $(-1,\ \infty)$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}(x+2)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{\ln(x+2)}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\ln(x+2)^{\frac{1}{x+1}}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\ln\left[1+(x+1)\right]^{\frac{1}{x+1}}=$

$=\ln\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\left[1+(x+1)\right]^{\frac{1}{x+1}}=\ln e=1$ și $f(-1)=1$, rezultă că f este continuă în $x=-1$. Prin urmare, f este continuă pe $\boldsymbol{R}$.

13. ***Studiați continuitatea fiecăreia dintre funcțiile*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}(2-e^x)^{\frac{1}{x}} & ,\ x<0\\ 1 & ,\ x\ge 0\end{cases}$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}} & ,\ x\in(-\infty,\ 1)\\ 0 & ,\ x=1\\ \dfrac{1}{(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}} & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2e^{\frac{1}{x}} & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ 0 & ,\ x=0\\ \dfrac{\ln(2-\cos x)}{x^2} & ,\ x\in(0,\ \infty)\end{cases}$.

Soluție: a) Se arată cu ușurință că f este continuă atât pe $(-\infty,\ 0)$, cât și pe $(0,\ \infty)$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2-e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left\{\left[1+(1-e^x)\right]^{\frac{1}{1-e^x}}\right\}^{\frac{1-e^x}{x}}=e^{-1}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1$, rezultă că f este discontinuă în $x=0$. Deci, f este continuă pe $\boldsymbol{R}^*$.

b) Dacă $x\in(-\infty,\ 1)$, atunci $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$, care este funcție continuă (fiind compusa dintre funcția exponențială și o funcție rațională). Dacă $x\in(1,\ \infty)$, atunci $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}}$, care este funcție continuă (fiind raportul a două funcții continue). Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, deducem că

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} e^{\frac{1}{x-1}}=0$. Evident, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{x-1}=\infty$. Remarcăm şi faptul că, pentru $x>1$, $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{e^{\frac{1}{x-1}}}$.

Rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{e^{\frac{1}{x-1}}}=\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{e^t}=0$. Ţinând seama şi de faptul că $f(1)=0$, conchidem că f este continuă şi în $x=1$. Drept urmare, funcţia f este continuă pe $\boldsymbol{R}$.

c) Se arată cu uşurinţă că f este continuă atât pe $(-\infty,\ 0)$, cât şi pe $(0,\ \infty)$. Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x}=-\infty$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}}=0$. Deci, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=0$. Evidenţiem şi faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(2-\cos x)}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln\left\{\left[1+(1-\cos x)\right]^{\frac{1}{1-\cos x}}\right\}^{\frac{1-\cos x}{x^2}}=$$

$$=\ln \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left\{\left[1+(1-\cos x)\right]^{\frac{1}{1-\cos x}}\right\}^{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Rezultă că f este discontinuă în $x=0$. Prin urmare, f este continuă pe $\boldsymbol{R}^*$.

14. ***Studiaţi continuitatea funcţiei*** $f:\left[\dfrac{1}{2},\ \infty\right)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=[x]+\left(x-[x]\right)^{[x]}$**.**

Soluţie: Dacă $x\in\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right)$, atunci $f(x)=1$ (căci $[x]=0$), iar dacă $x\in[1,\ 2)$, atunci $f(x)=x$ (fiindcă $[x]=1$). Se arată cu uşurinţă că f este continuă atât pe $\left[\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$, cât şi pe $(1,\ 2)$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 1=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x=1$ şi $f(1)=1$, rezultă că f este continuă şi în $x=1$. Fie $k\in\boldsymbol{N}$, $k\ge 2$. Dacă $x\in\left[k-1,\ k\right)$, atunci $f(x)=k-1+(x-k+1)^{k-1}$, iar dacă $x\in[k,\ k+1)$, atunci $f(x)=k+(x-k)^k$. Se arată cu uşurinţă că f este continuă atât pe $\left(k-1,\ k\right)$, cât şi pe $(k,\ k+1)$. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x<k}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x<k}} \left[k-1+(x-k+1)^{k-1}\right]=k$, $\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x>k}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x>k}} \left[k+(x-k)^k\right]=k$ şi $f(k)=k$, rezultă că f este continuă şi în $x=k$. Deci, f este continuă pe $\left[\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$.

15. ***Studiaţi continuitatea funcţiei*** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(x-1)x^n+\ln x}{2x^{n+1}+x+1}$**.**

Soluţie: Dacă $x\in(0,\ 1)$, atunci $x^n\to 0$, de unde $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$. Deci, pentru $x\in(0,\ 1)$, f este continuă (fiind raportul a două funcţii continue). Dacă $x\in(1,\ \infty)$, atunci $x^n\to+\infty$. În acest caz, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x-1+\dfrac{\ln x}{x^n}}{2x+\dfrac{x+1}{x^n}}=\dfrac{x-1}{2x}$. Prin urmare, pentru $x\in(1,\ \infty)$, f este continuă (fiind restricţia uni funcţii raţionale). Remarcăm şi faptul că $f(1)=0$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\ln x}{x+1}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x-1}{2x}=0$ şi $f(1)=0$, rezultă că f este continuă în $x=1$. Ca urmare a celor stabilite anterior, f este continuă pe $(0,\ \infty)$.

16. ***Studiați continuitatea funcției*** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 0\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(2x^2-1)x^n}{x(1+x^n)}$**.**

Soluție: Dacă $x\in(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$, atunci $|x|<1$, ceea ce implică $|x|^n\to 0$, de unde $x^n\to 0$. Drept urmare, în cazul considerat, $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Evident, $f(1)=1$. Dacă $x\in(1,\ \infty)$, atunci $x^n\to\infty$, de unde $\dfrac{1}{x^n}\to 0$. Rezultă că $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^n}+2x^2-1}{x\left(1+\dfrac{1}{x^n}\right)}=\dfrac{2x^2-1}{x}$. Dacă $x\in(-\infty,\ -1)$, atunci $|x|>1$, ceea ce implică $|x|^n\to+\infty$, de unde de unde $\dfrac{1}{|x|^n}\to 0$ și, deci, $\dfrac{1}{x^n}\to 0$. Deducem că, în acest caz, $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-1}{x} & ,\ x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\infty)\\ 1 & ,\ x=1\\ \dfrac{1}{x} & ,\ x\in(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)\end{cases}$.

Se arată cu ușurință că f este continuă atât pe $(-\infty,\ -1)\cup(1,\infty)$, cât și pe $(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$ (întrucât avem de a face cu restricții de funcții raționale). Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{1}{x}=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{2x^2-1}{x}=1$ și $f(1)=1$, deducem că f este continuă în $x=1$. În consecință, f este continuă pe tot domeniul de definiție.

17. ***Studiați continuitatea funcției*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos x+xe^{nx}}{x+e^{nx}}$**.**

Soluție: Dacă $x\in(-\infty,\ 0)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}nx=-\infty$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=0$, ceea ce implică $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$. Rezultă că, în cazul considerat, f este continuă (fiind raportul a două funcții continue). Dacă $x\in(0,\ \infty)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}nx=\infty$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{e^{nx}}=0$. Deducem că $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1-\cos x}{e^{nx}}+x}{\dfrac{x}{e^{nx}}+1}=x$. Rezultă că, și în acest caz, f este continuă (fiind restricția unei funcții polinomiale). Remarcăm și faptul că $f(0)=0$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}x\dfrac{1-\cos x}{x^2}=0\cdot\dfrac{1}{2}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x=0$ și $f(0)=0$, rezultă că f este continuă în $x=0$. Deci, f este continuă pe $\boldsymbol{R}$.

18. ***Determinați*** $a\in\boldsymbol{R}$**,** ***astfel încât funcția*** $f:[1,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\left(\sqrt{x-1}-1\right)}{x-2} & ,\ x\in[1,\ 2)\\ ax-3 & ,\ x\in[2,\ \infty)\end{cases}$ ***să fie continuă pe*** $[1,\ \infty)$**.**

Soluție: Se arată cu ușurință că f este continuă atât pe $[1,\ 2)$, cât și pe $(2,\ \infty)$. Deci, f este continuă pe $[1,\ \infty)$ dacă și numai dacă f este continuă și în $x=2$. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}f(x)=2\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=$

$= 2\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (ax-3) = 2a-3$ şi $f(2) = 2a-3$, deducem că f este continuă în $x=2$ dacă şi numai dacă $2a-3=1$, de unde $a=2$.

19. ***Determinaţi*** $a \in \boldsymbol{R}$ ***, astfel încât funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} |2x-a| & , \ x\in(-\infty,\ 1) \\ 4-ax & , \ x\in[1,\ \infty) \end{cases}$ ***să fie continuă pe*** $\boldsymbol{R}$.

Soluţie: Se arată cu uşurinţă că f este continuă atât pe $(-\infty,\ 1)$, cât şi pe $(1,\ \infty)$. Rezultă că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$ dacă şi numai dacă f este continuă şi în $x=1$. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} |2x-a| = |2-a|$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (4-ax) = 4-a$ şi $f(1) = 4-a$, deducem că f este continuă în $x=1$ dacă $|2-a| = 4-a$. Cum $|2-a| \ge 0$, egalitatea anterioară este posibilă dacă şi numai dacă $a \le 4$. Dacă $a\in(-\infty,\ 2)$, atunci egalitatea $|2-a| = 4-a$ conduce la $2-a = 4-a$, ceea ce nu este posibil. Dacă $a\in[2,\ 4]$, atunci egalitatea $|2-a| = 4-a$ conduce la $a-2 = 4-a$, de unde $a=3$.

20. ***Determinaţi*** $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ ***, astfel încât funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & , \ x\in(-\infty,\ 0) \\ ax+b & , \ x\in[0,\ 2] \\ \dfrac{2^x-4}{x-2} & , \ x\in(2,\ \infty) \end{cases}$ ***să fie continuă pe*** $\boldsymbol{R}$.

Soluţie: Evident, funcţia f este continuă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 2)$ şi $(2,\ \infty)$. Rezultă că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$ dacă şi numai dacă este continuă atât în $x=0$, cât şi în $x=2$. Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (ax+b) = b$ şi $f(0) = b$, deducem că f este continuă în $x=0$ dacă $b=0$. Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (ax+b) = 2a+b$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{2^x-4}{x-2} = 4\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{2^{x-2}-1}{x-2} = 4\ln 2$ şi $f(2) = 2a+b$, rezultă că f este continuă în $x=2$ dacă $2a+b = 4\ln 2$, ceea ce împreună cu $b=0$, conduce la $a = \ln 4$.

21. ***Determinaţi*** $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ ***, astfel încât funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\left(\sqrt{1-x}-a\right)}{x} & , \ x\in(-\infty,\ 0) \\ be^x - 2 & , \ x\in[0,\ \infty) \end{cases}$ ***să fie continuă pe*** $\boldsymbol{R}$.

Soluţie: Se arată cu uşurinţă că f este continuă atât pe $(-\infty,\ 0)$, cât şi pe $(0,\ \infty)$. Deci, f este continuă pe $\boldsymbol{R}$ dacă şi numai dacă f este continuă şi în $x=0$. Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\sqrt{1-x}-a\right) = 1-a$. Rezultă că, dacă $a<1$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$, iar dacă $a>1$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \infty$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ trebuie să fie finită, este necesar ca $a=1$. În acest caz, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 2\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} = 2\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = -1$. Evidenţiind şi faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (be^x - 2) = b-2$ şi $f(0) = b-2$, deducem că f este continuă în $x=0$ dacă $b-2 = -1$, de unde $b=1$.

22. Determinați $a,\ b\in \boldsymbol{R}\ \left(a\ge\frac{1}{4}\right)$***, astfel încât funcția***

$$f:[0,\ 2)\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+x+a}-b}{x^2-3x+2}, & x\ne 1\\ -\dfrac{3}{4}, & x=1\end{cases}$$

să fie continuă pe $[0,\ 2)$**.**

Soluție: Se arată cu ușurință că f este continuă pe $[0,\ 1)\cup(1,\ 2)$. Rezultă că f este continuă pe $[0,\ 2)$ dacă și numai dacă este continuă și în $x=1$. Remarcând că $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+x+a}-b\right)=\sqrt{a+2}-b$, deducem că, dacă $\sqrt{a+2}-b<0$ atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$, iar dacă $\sqrt{a+2}-b>0$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\infty$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ trebuie să fie finită, este necesar ca $\sqrt{a+2}-b=0$, de unde $b>0$ și $a=b^2-2$. În acest caz,

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+b^2-2}-b}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+b^2-2}+b}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+b^2-2}+b}=$$

$$=-\frac{3}{|b|+b}=-\frac{3}{2b}\ \text{(căci } b>0\text{)}.$$ Având în vedere că $f(1)=-\frac{3}{4}$, deducem că f este continuă în $x=1$ dacă $-\frac{3}{2b}=-\frac{3}{4}$, de unde $b=2$, ceea ce împreună cu $a=b^2-2$, conduce la $a=2$.

23. a) ***Se consideră funcțiile*** $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\operatorname{sgn}x,\ g(x)=x^2+1$**.** ***Studiați continuitatea funcțiilor*** $f,\ g,\ f\circ g$ ***și*** $g\circ f$**.**

b) ***Se consideră funcțiile*** $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\operatorname{sgn}x,\ g(x)=x^3-x$**.** ***Studiați continuitatea funcțiilor*** $f\circ g$ ***și*** $g\circ f$**.**

Soluție: a) Evident, $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\infty,\ 0)\\ 0, & x=0\\ 1, & x\in(0,\ \infty)\end{cases}$. Se arată cu ușurință că f este continuă pe $\boldsymbol{R}^*$ și că $x=0$ este punct de discontinuitate de speța întâi a funcției f. Deoarece g este o funcție polinomială, ea este continuă pe $\boldsymbol{R}$. Remarcând că $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=\operatorname{sgn}(x^2+1)=1$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, deducem că $f\circ g$ este continuă pe $\boldsymbol{R}$. Având în vedere că $\left(g\circ f\right)(x)=g\left(f(x)\right)=1+f^2(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 2, & x\ne 0\end{cases}$, deducem că $g\circ f$ este continuă pe $\boldsymbol{R}^*$ și că $x=0$ este punct de discontinuitate de speța întâi a funcției $g\circ f$.

b) Întrucât $x^3-x=0$, oricare ar fi $x\in\{-1,\ 0,\ 1\}$, $x^3-x>0$, oricare ar fi $x\in(-1,\ 0)\cup(1,\ \infty)$ și $x^3-x<0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)$, iar $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=\operatorname{sgn}(x^3-x)$, rezultă că

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)\\ 0, & x\in\{-1,\ 0,\ 1\}\\ 1, & x\in(-1,\ 0)\cup(1,\ \infty)\end{cases}.$$ Se arată cu ușurință că $f\circ g$ este continuă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 0,\ 1\}$ și că $x=-1,\ x=0,\ x=1$ sunt puncte de discontinuitate (de speța întâi) a lui $f\circ g$. Având în vedere că $\left(g\circ f\right)(x)=g\left(f(x)\right)=f^3(x)-f(x)$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, deducem că $\left(g\circ f\right)(x)=0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Prin urmare, $g\circ f$ este continuă pe $\boldsymbol{R}$.

24. Se consideră funcțiile:

$$u:(0,\ 1)\to(0,\ 2),\ u(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,\ 1)\cap\boldsymbol{Q}\\ 2-x, & x\in(0,\ 1)\cap\left(\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}\right)\end{cases}\ \textbf{și}\ f:(0,\ 2)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,\ 1]\\ 2-x, & x\in(1,\ 2)\end{cases}.$$

Studiați continuitatea funcțiilor $u,\ f$ ***și*** $f\circ u$**.**

Soluție: Fie x_0 un punct oarecare din intervalul $(0,\ 1)$ și $(x_n)_{n\geq 0}$ un șir de numere reale cu proprietatea că $x_n \to x_0$. Dacă $x_n \in \boldsymbol{Q}$, atunci $u(x_n) = x_n$, de unde $u(x_n) \to x_0$. Dacă $x_n \in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$, atunci $u(x_n) = 2 - x_n$, de unde $u(x_n) \to 2 - x_0$. Pentru ca u să aibă limită în x_0, este necesar ca $x_0 = 2 - x_0$, de unde $x_0 = 1 \notin (0,\ 1)$. Contradicția la care s-a ajuns arată că funcția u nu are limită în nici un punct din $(0,\ 1)$ și, deci, este discontinuă pe $(0,\ 1)$. Se arată cu ușurință că f este continuă atât pe $(0,\ 1)$, cât și pe $(1,\ 2)$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (2-x) = 1$ și $f(1) = 1$, rezultă că f este continuă și în $x = 1$. Deci, f este continuă pe $(0,\ 2)$. Remarcăm, mai întâi, că $f\circ u : (0,\ 1) \to \boldsymbol{R}$, $(f\circ u)(x) = \begin{cases} u(x) & ,\ 0 < u(x) \leq 1 \\ 2 - u(x) & ,\ 1 < u(x) < 2 \end{cases}$. Dacă $x \in (0,\ 1) \cap \boldsymbol{Q}$, atunci $u(x) = x \in (0,\ 1)$, deci $(f\circ u)(x) = x$. Dacă $x \in (0,\ 1) \cap \left(\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}\right)$, atunci $u(x) = 2 - x \in (1,\ 2)$, de unde $(f\circ u)(x) = 2 - u(x) = 2 - (2 - x) = x$. Deci, $(f\circ u)(x) = x$, oricare ar fi $x \in (0,\ 1)$ și, deci, $f\circ u$ este continuă pe $(0,\ 1)$.

25. ***Studiați continuitatea funcției*** $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & ,\ x \in \boldsymbol{Q} \\ \dfrac{1}{x} & ,\ x \in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q} \end{cases}$.

Soluție: Fie x_0 un punct oarecare din $\boldsymbol{R}^*$. Este binecunoscut faptul că f este continuă în x_0 doar dacă, oricare ar fi șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_n \in \boldsymbol{R}$ și $x_n \to x_0$, avem $f(x_n) \to f(x_0)$. Să considerăm șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_n \in \boldsymbol{Q}$ și $x_n \to x_0$. Atunci, $f(x_n) = x_n$, de unde $f(x_n) \to x_0$. Fie șirul $(x'_n)_{n\geq 1}$, cu $x'_n \in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$ și $x'_n \to x_0$. În acest caz, $f(x'_n) = \dfrac{1}{x'_n}$, de unde $f(x'_n) \to \dfrac{1}{x_0}$. Cum cele două șiruri de valori ale funcției f trebuie să conveargă la aceeași limită, este necesar ca $x_0 = \dfrac{1}{x_0}$, ceea ce conduce la $x_0^2 = 1$, de unde $x_0 = -1$ sau $x_0 = 1$. Deci, funcția f poate fi continuă doar în $x = -1$ sau $x = 1$. Să analizăm continuitatea funcției f în $x = -1$. Remarcăm, mai întâi, că $f(-1) = -1$. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale convergent la -1. Dacă $x_n \in \boldsymbol{Q}$, atunci $|f(x_n) - f(-1)| = |x_n + 1|$, iar dacă $x_n \in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$, atunci $|f(x_n) - f(-1)| = \dfrac{|x_n + 1|}{|x_n|}$. Cum $x_n \to -1$, rezultă că $|x_n + 1| \to 0$, de unde $|f(x_n) - f(-1)| \to 0$ (oricare ar fi șirul $(x_n)_{n\geq 1}$). Deci, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$, ceea ce arată că f este continuă în $x = -1$. Analog, arătăm că f este continuă în $x = 1$. Trebuie să mai analizăm continuitatea lui f în $x = 0$. Fie șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(x'_n)_{n\geq 1}$ unde $x_n = \dfrac{1}{n}$, $x'_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Evident, $x_n \to 0$ și $x'_n \to 0$. Deoarece $x_n \in \boldsymbol{Q}$, iar $x'_n \in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$, rezultă că $f(x_n) = x_n = \dfrac{1}{n}$ și $f(x'_n) = \dfrac{1}{x'_n} = \sqrt{n^2+1}$. Având în vedere că $f(x_n) \to 0$, iar $f(x'_n) \to \infty$, deducem că f nu are limită în $x = 0$. Deci, f este discontinuă în $x = 0$.

26. ***Stabiliți care dintre următoarele funcții poate fi prelungită prin continuitate în punctele indicate în dreptul fiecăreia dintre ele*****:**

a) $f : \boldsymbol{R}\setminus\{1\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, ***în*** $x = 1$;

b) $f : \boldsymbol{R}\setminus\{-2,\ 1\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$, ***în*** $x = -2$;

c) $f : \boldsymbol{R}\setminus\{1\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$, ***în*** $x = 1$;

d) $f : \boldsymbol{R}^* \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x\cos\dfrac{2}{x}$, ***în*** $x = 0$;

e) $f:(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & ,\ x\in(-1,\ 0)\\ \dfrac{\arcsin x}{x} & ,\ x\in(0,\ 1)\end{cases}$ **, *în*** $x=0$**;**

f) $f:[0,\ 1)\cup(1,\ 2)\cup(2,\ 4]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-5x+2}{x-1} & ,\ x\in[0,\ 1)\\ 2x-1 & ,\ x\in(1,\ 2)\\ \dfrac{3x-6}{x^2-3x+2} & ,\ x\in(2,\ 4]\end{cases}$ **, *în*** $x=1$ ***şi în*** $x=2$**;**

g) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(2-x)}{1-x} & ,\ x\in(-\infty,\ 1)\\ \dfrac{e^{x^2}-e}{x-1} & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$ **, *în*** $x=1$**.**

Soluție: a) Deoarece $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, rezultă că f se poate prelungi prin continuitate în $x=1$, iar prelungirea ei prin continuitate este funcția $\overline{f}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \overline{f}(x)=x+1$.

b) Remarcând că $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{4}{3}$, deducem că f se poate prelungi prin continuitate în $x=-2$, iar prelungirea ei este funcția

$$\overline{f}:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\quad \overline{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2} & ,\ x\in\boldsymbol{R}\setminus\{-2,\ 1\}\\ \dfrac{4}{3} & ,\ x=-2\end{cases}.$$

c) Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x+2}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x+2}{x-1}=\infty$, rezultă că f nu are limită în $x=1$. Deci, f nu poate fi prelungită prin continuitate în $x=1$.

d) Având în vedere că $\left|x\cos\dfrac{2}{x}\right|=|x|\left|\cos\dfrac{2}{x}\right|\le|x|$ (oricare ar fi $x\neq 0$), iar $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, deducem că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Prin urmare, f poate fi prelungită prin continuitate în $x=0$, iar prelungirea ei este funcția

$$\overline{f}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad \overline{f}(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{2}{x} & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}.$$

e) Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. Deci, f poate fi prelungită prin continuitate în $x=0$, iar prelungirea ei este funcția

$$\overline{f}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad \overline{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & ,\ x\in(-1,\ 0)\\ 1 & ,\ x=0\\ \dfrac{\arcsin x}{x} & ,\ x\in(0,\ 1)\end{cases}.$$

f) Ținând seama că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{3x^2-5x+2}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(3x-2)=1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(2x-1)=1$, deducem că $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(2x-1)=3$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{3x-6}{x^2-3x+2}=$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{3}{x-1} = 3$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$. Ca urmare a celor stabilite anterior, conchidem că funcția f poate fi prelungită prin continuitate atât în $x = 1$, cât și în $x = 2$, iar prelungirea ei este funcția

$$\overline{f} : [0,\ 4] \to \boldsymbol{R}, \quad \overline{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x-1} & , \quad x \in [0,\ 1) \\ 2x - 1 & , \quad x \in [1,\ 2] \\ \dfrac{3x-6}{x^2 - 3x + 2} & , \quad x \in (2,\ 4] \end{cases}.$$

g) Evidențiind faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\ln(2-x)}{1-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln(2-x)^{\frac{1}{1-x}} = \ln \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left[1 + (1-x)\right]^{\frac{1}{1-x}} = \ln e = 1$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{e^{x^2} - e}{x-1} = e \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 - 1}(x+1) = 2e$, deducem că f nu are limită în $x = 1$. Deci, f nu poate fi prelungită prin continuitate în $x = 1$.

27. ***Fie*** $a,\ b \in \boldsymbol{R}\ (a < b)$, A ***o mulțime finită de puncte din*** $(a,\ b)$ ***și funcțiile continue*** $f,\ g : (a,\ b) \to \boldsymbol{R}$. ***Arătați că, dacă*** $f(x) = g(x)$, ***oricare ar fi*** $x \in (a,\ b) \setminus A$, ***atunci*** $f = g$.

Soluție: Fie x_0 un punct oarecare din mulțimea A. Cum mulțimea A este finită, există o vecinătate V a lui x_0 care, cu excepția lui x_0, conține numai puncte din $(a,\ b) \setminus A$. Rezultă că $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in V \setminus \{x_0\}$, ceea ce implică $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Având în vedere că f și g sunt continue pe $(a,\ b)$, iar $x_0 \in (a,\ b)$, deducem că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Drept urmare, $f(x_0) = g(x_0)$. Întrucât x_0 este oarecare în A, rezultă că $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$, ceea ce, împreună cu $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in (a,\ b) \setminus A$, conduce la $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in (a,\ b)$. Deci, $f = g$.

28. ***Se consideră funcțiile continue*** $f,\ g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. ***Arătați că, dacă*** $f(x) = g(x)$, ***oricare ar fi*** $x \in \boldsymbol{Q}$, ***atunci*** $f = g$. ***Rămâne valabilă concluzia dacă*** $f(x) = g(x)$, ***oricare ar fi*** $x \in \boldsymbol{Z}$ **?**

Soluție: Pentru a îndeplini cerința enunțului, este suficient să demonstrăm că $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$. Fie x_0 un număr oarecare din $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ și șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $x_n \in \boldsymbol{Q}$ și $x_n \to x_0$. Deoarece $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{Q}$, rezultă că $f(x_n) = g(x_n)$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. Având în vedere că f și g sunt continue pe $\boldsymbol{R}$ și $x_n \to x_0$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = g(x_0)$. Drept urmare, $f(x_0) = g(x_0)$. Cum x_0 este oarecare în $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$, conchidem că $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

Răspunsul la întrebarea din enunț este negativ. Aceasta rezultă analizând funcțiile $f,\ g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \sin \pi x,\ g(x) = 0$. Evident, f și g sunt continue pe $\boldsymbol{R}$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{Z}$ (căci $\sin k\pi = 0$, pentru orice $k \in \boldsymbol{Z}$). Cum $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, rezultă că $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \neq g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

29. ***Se consideră funcțiile*** $f,\ g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. ***Arătați că, dacă*** f ***este continuă pe*** $\boldsymbol{R}$, g ***este monotonă pe*** $\boldsymbol{R}$ ***și*** $f(x) = g(x)$, ***oricare ar fi*** $x \in \boldsymbol{Q}$, ***atunci*** $f = g$.

Soluție: Pentru fixare, să presupunem că g este crescătoare pe $\boldsymbol{R}$. Fie x_0 un număr oarecare din $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$. Evident, există șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(x'_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_n \in \boldsymbol{Q}$ și $x_n < x_0,\ x_n \to x_0$, respectiv $x'_n \in \boldsymbol{Q}$, $x'_n > x_0,\ x'_n \to x_0$. Deoarece $x_n < x_0 < x'_n$, iar g este crescătoare, rezultă că $g(x_n) \leq g(x_0) \leq g(x'_n)$. Având în vedere că $x_n,\ x'_n \in \boldsymbol{Q}$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{Q}$, deducem că $f(x_n) \leq g(x_0) \leq f(x'_n)$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} g(x_0) \leq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$, ceea ce conduce la $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq g(x_0) \leq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$ (căci

$g(x_0) = \text{const}$). Cum f este continuă pe $\boldsymbol{R}$ şi $x_n \to x_0,\ x_n' \to x_0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n'\right) = f(x_0)$. Drept urmare, $f(x_0) \le g(x_0) \le f(x_0)$, de unde $f(x_0) = g(x_0)$. Ţinând seama că x_0 este oarecare din $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$, conchidem că $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$, ceea ce împreună cu $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{Q}$, conduce la $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{R}$ şi, deci, $f = g$.

30. ***Studiaţi semnul fiecăreia dintre funcţiile*:**

a) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$; **b)** $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$;

c) $f : \boldsymbol{R} \setminus \{0,\ 4\} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x}$; **d)** $f : \boldsymbol{R} \setminus \{-3,\ 1\} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 + 2x - 3}$.

Soluţie: a) Remarcăm, mai întâi, că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$ şi că $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1,\ 1,\ 3\}$. Întrucât, pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ 3)$ şi $(3,\ \infty)$, f este continuă şi nenulă, deducem că în toate punctele fiecăruia dintre aceste intervale f are acelaşi semn. Cum $f(-2) < 0,\ f(0) > 0,\ f(2) < 0$ şi $f(4) > 0$, rezultă că $f(x) < 0$, oricare ar fi $x \in (-\infty,\ -1) \cup (1,\ 3)$ şi că $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (-1,\ 1) \cup (3,\ \infty)$.

b) Se arată cu uşurinţă că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$ şi că $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3,\ -1,\ 1,\ 3\}$. Prin urmare, pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -3)$, $(-3,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ 3)$ şi $(3,\ \infty)$ f este continuă şi nenulă. Rezultă că în toate punctele fiecăruia dintre aceste intervale f are acelaşi semn. Remarcând şi faptul că $f(-4) > 0,\ f(-2) < 0,\ f(0) > 0,\ f(2) < 0$ şi $f(4) > 0$, deducem că $f(x) < 0$, pentru orice $x \in (-3,\ -1) \cup (1,\ 3)$ şi că $f(x) > 0$, pentru orice $x \in (-\infty,\ -3) \cup (-1,\ 1) \cup (3,\ \infty)$.

c) Evident, f este continuă pe $\boldsymbol{R} \setminus \{0,\ 4\}$, iar $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2,\ 2\}$. Drept urmare, pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 4)$ şi $(4,\ \infty)$ f este continuă şi nenulă. Rezultă că în toate punctele fiecăruia dintre aceste intervale f are acelaşi semn. Evidenţiind şi faptul că $f(-3) > 0,\ f(-1) < 0,\ f(1) > 0,\ f(3) < 0$ şi $f(5) > 0$, rezultă că $f(x) < 0$, pentru orice $x \in (-2,\ 0) \cup (2,\ 4)$ şi că $f(x) > 0$, pentru orice $x \in (-\infty,\ -2) \cup (0,\ 2) \cup (4,\ \infty)$.

d) Remarcăm, mai întâi, că f este continuă pe $\boldsymbol{R} \setminus \{-3,\ 1\}$ şi că $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1,\ 3\}$. Rezultă că pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -3)$, $(-3,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ 3)$ şi $(3,\ \infty)$ f este continuă şi nenulă. Deci, în toate punctele fiecăruia dintre aceste intervale f are acelaşi semn. Remarcând şi faptul că $f(-4) < 0,\ f(-2) > 0,\ f(0) > 0,\ f(2) < 0$ şi $f(4) > 0$, deducem că $f(x) < 0$, pentru orice $x \in (-\infty,\ -3) \cup (1,\ 3)$ şi că $f(x) > 0$, pentru orice $x \in (-3,\ -1) \cup (-1,\ 1) \cup (3,\ \infty)$.

31. ***Studiaţi semnul fiecăreia dintre funcţiile*:**

a) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = e^{2x} - 6e^x + 8$; **b)** $f : (0,\ \infty) \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \ln^2 x - 2\ln x$;

c) $f : (0,\ e) \cup (e,\ \infty) \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \dfrac{\ln^2 x - 3\ln x}{\ln x - 1}$; **d)** $f : [0,\ 2\pi] \to \boldsymbol{R},\ f(x) = 3 - 4\cos^2 x$.

Soluţie: a) Se arată cu uşurinţă că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$ şi că $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\ln 2,\ \ln 4\}$. Rezultă că pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ \ln 2)$, $(\ln 2,\ \ln 4)$ şi $(\ln 4,\ \infty)$ f este continuă şi nenulă. Drept urmare, în toate punctele fiecăruia dintre aceste intervale f are acelaşi semn. Remarcând şi faptul că $f(0) > 0$ $(0 \in (-\infty,\ \ln 2))$, $f(\ln 3) < 0$ şi $f(\ln 5) > 0$, deducem că $f(x) < 0$, pentru orice $x \in (\ln 2,\ \ln 4)$ şi că $f(x) > 0$, pentru orice $x \in (-\infty,\ \ln 2) \cup (\ln 4,\ \infty)$.

b) Remarcăm, mai întâi, că f este continuă pe $(0,\ \infty)$ şi că $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1,\ e^2\}$. Rezultă că pe fiecare dintre intervalele $(0,\ 1)$, $(1,\ e^2)$ şi $(e^2,\ \infty)$ f este continuă şi nenulă. Deci, în toate punctele fiecăruia dintre aceste intervale f are acelaşi semn. Evidenţiind şi faptul că $f\left(\dfrac{1}{e}\right) > 0,\ f(e) < 0$ şi

$f(e^3)>0$, conchidem că $f(x)<0$, pentru orice $x\in(1,\ e^2)$ şi că $f(x)>0$, pentru orice $x\in(0,\ 1)\cup(e^2,\ \infty)$.

c)) Se arată cu uşurinţă că f este continuă pe $(0,\ e)\cup(e,\ \infty)$ şi că $f(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1,\ e^3\}$. Rezultă că pe fiecare dintre intervalele $(0,\ 1)$, $(1,\ e)$, $(e,\ e^3)$ şi $(e^3,\ \infty)$ f este continuă şi nenulă. Prin urmare, în toate punctele fiecăruia dintre aceste intervale f are acelaşi semn. Remarcând şi faptul că $f\left(\frac{1}{e}\right)<0$, $f\left(\sqrt{e}\right)>0$, $f(e^2)<0$ şi $f(e^4)>0$, deducem că $f(x)<0$, pentru orice $x\in(0,\ 1)\cup(e,\ e^3)$ şi că $f(x)>0$, pentru orice $x\in(1,\ e)\cup(e^3,\ \infty)$.

d) Evident, $f(x)=3-4\frac{1+2\cos 2x}{2}=1-2\cos 2x$. Remarcăm şi faptul că f este continuă pe $[0,\ 2\pi]$ şi că $f(x)=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}\right\}$ (căci $x\in[0,\ 2\pi]$). Rezultă că pe fiecare dintre intervalele $\left[0,\ \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}\right)$ şi $\left(\frac{11\pi}{6},\ 2\pi\right]$ f este continuă şi nenulă. Deci, în toate punctele fiecăruia dintre aceste intervale f are acelaşi semn. Cum $f(0)<0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, $f(\pi)<0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)>0$, $f(2\pi)<0$, conchidem că $f(x)<0$, pentru orice $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{11\pi}{6},\ 2\pi\right]$ şi că $f(x)>0$, pentru orice $x\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}\right)$.

32. ***Rezolvaţi inecuaţiile*:**

a) $(x^2-5x+4)(\ln x-1)<0$; **b)** $\frac{2^{x+1}-8}{x^2-3x-4}>0$; **c)** $\frac{4^x-9\cdot 2^x+8}{x^2-3x-10}\le 0$; **d)** $\sqrt{5x-x^2}\le 3-x$.

Soluţie: a) Evident, este necesar ca $x\in(0,\ \infty)$. Să considerăm funcţia $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=(x^2-5x+4)(\ln x-1)$. Se arată cu uşurinţă că f este continuă pe $(0,\ \infty)$ şi că $f(x)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\{1,\ e,\ 4\}$. Rezultă că f este continuă şi nenulă pe fiecare dintre intervalele $(0,\ 1)$, $(1,\ e)$, $(e,\ 4)$ şi $(4,\ \infty)$, ceea ce arată că f păstrează acelaşi semn în toate punctele fiecăruia dintre aceste intervale. Remarcând şi faptul că $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$, $f(2)>0$, $f(3)<0$ şi $f(5)>0$, deducem că $f(x)<0$, pentru orice $x\in(0,\ 1)\cup(e,\ 4)$. Deci, soluţiile inecuaţiei din enunţ sunt numerele reale $x\in(0,\ 1)\cup(e,\ 4)$.

b) Remarcăm, mai întâi, că este necesar ca $x\ne -1$ şi $x\ne 4$. Să considerăm funcţia $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 4\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{2^{x+1}-8}{x^2-3x-4}$. Se arată cu uşurinţă că f este continuă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 4\}$ şi că $f(x)=0\Leftrightarrow x=2$. Deci, f este continuă şi nenulă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 2)$, $(2,\ 4)$ şi $(4,\ \infty)$, ceea ce arată că f păstrează acelaşi semn în toate punctele fiecăruia dintre aceste intervale. Remarcând şi faptul că $f(-2)<0$, $f(1)>0$, $f(3)<0$ şi $f(4)>0$, deducem că $f(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,\ 2)\cup(4,\ \infty)$. Drept urmare, orice număr real $x\in(-1,\ 2)\cup(4,\ \infty)$ este soluţie a inecuaţiei din enunţ.

c) Evident, este necesar ca $x\ne -2$ şi $x\ne 5$. Să considerăm funcţia $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-2,\ 5\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{4^x-9\cdot 2^x+8}{x^2-3x-10}$. Remarcăm, mai întâi, că f este continuă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-2,\ 5\}$ şi că $f(x)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4^x-9\cdot 2^x+8=0\Leftrightarrow 2^x=1$ sau $2^x=8\Leftrightarrow x\in\{0,\ 3\}$. Rezultă că f este continuă şi nenulă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ 0)$, $(0,\ 3)$, $(3,\ 5)$ şi $(5,\ \infty)$, ceea ce arată că f păstrează acelaşi semn în toate punctele fiecăruia dintre aceste intervale. Remarcând că $f(-3)>0$, $f(-1)<0$, $f(1)>0$,

$f(4)<0$ şi $f(6)>0$, deducem că $f(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-2,\ 0]\cup[3,\ 5)$. Deci, orice număr real $x\in(-2,\ 0]\cup[3,\ 5)$ este soluție a inecuației din enunț.

d) Evident, este necesar ca $x\in[0,\ 3]$ (căci $5x-x^2\ge 0$ şi $3-x\ge 0$). Să considerăm funcția $f:[0,\ 3]\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\sqrt{5x-x^2}+x-3$. Remarcăm, mai întâi, că f este continuă pe $[0,\ 3]$ şi că $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{5x-x^2}=3-x\Leftrightarrow 5x-x^2=(3-x)^2\Leftrightarrow 2x^2-11x+9=0\Leftrightarrow x=1$ (fiindcă $x\in[0,\ 3]$). Deci, f este continuă şi nenulă pe fiecare dintre intervalele $[0,\ 1)$ şi $(1,\ 3]$, ceea ce arată că f păstrează acelaşi semn în toate punctele fiecăruia dintre aceste intervale. Remarcând că $f(0)<0$ şi $f(3)>0$, deducem că $f(x)<0$, pentru orice $x\in[0,\ 1)$. Drept urmare, orice număr real $x\in[0,\ 1]$ este soluție a inecuației din enunț.

33. a) ***Arătați că ecuația*** $e^x=1+\cos x$ ***are cel puțin o rădăcină în intervalul*** $(0,\ 1)$**.**

b) ***Demonstrați că ecuația*** $x^3+2x-4=0$ ***are o rădăcină reală şi numai una.***

c) ***Arătați că ecuația*** $3^x=9x$ ***are cel puțin două rădăcini reale.***

d) ***Demonstrați că ecuația*** $e^x+\sin x-3=0$ ***are o rădăcină şi numai una în intervalul*** $(0,\ 1)$**.**

Soluție: a) Fie funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=e^x-\cos x-1$. Evident, f este continuă pe $\boldsymbol{R}$. Remarcând şi faptul că $f(0)=-\cos 0=-1<0$, iar $f(1)=e-\cos 1-1>0$ (căci $e>2$, iar $1+\cos 1<2$), deducem că există $x_1\in(0,\ 1)$ astfel încât $f(x_1)=0$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

b) Să considerăm funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^3+2x-4$. Fie $x_1,\ x_2\in\boldsymbol{R}$ şi $x_1<x_2$. Deoarece $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+2)$, rezultă că $f(x_1)<f(x_2)$ (căci $x_1-x_2<0$ şi $x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$), ceea ce arată că f este strict crescătoare pe $\boldsymbol{R}$. Remarcând şi faptul că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, iar $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, deducem că există un singur $x_1\in\boldsymbol{R}$ astfel încât $f(x_1)=0$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

c) Fie funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=3^x-9x$. Remarcăm, mai întâi, că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$. Evidențiind şi faptul că $f(0)=1>0$, $f(1)=-6<0$, deducem că există $x_1\in(0,\ 1)$ astfel încât $f(x_1)=0$. Având în vedere şi faptul că $f(3)=0$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

d) Să considerăm funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=e^x+\sin x-3$. Întrucât funcțiile $g(x)=e^x$ şi $h(x)=\sin x$ sunt strict crescătoare pe $(0,\ 1)$, rezultă că funcția f este strict crescătoare. Ținând seama şi de faptul că f este continuă pe $(0,\ 1)$, iar $f(0)=-2<0$ şi $f(1)=e+\sin 1-3>0$ (căci $1>\dfrac{\pi}{4}$ implică $\sin 1>\sin\dfrac{\pi}{4}=$ $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0,7$), deducem că există un singur $x_1\in(0,\ 1)$ astfel încât $f(x_1)=0$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

34. a) ***Fie*** $n\in\boldsymbol{N}$, $n\ge 2$**.** ***Arătați că ecuația*** $x^n+nx-1=0$ ***are o singură rădăcină reală pozitivă.***

b) ***Fie*** x_n ***rădăcina menționată la a). Calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ ***şi*** $\lim\limits_{n\to\infty}n\,x_n$**.**

Soluție: a) Să considerăm funcția $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^n+nx-1$. Deoarece $f(0)=-1$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, iar f este continuă şi strict crescătoare, rezultă că există un singur $x_n\in(0,\ \infty)$ astfel încât $f(x_n)=0$. Deci, cerința enunțului a fost îndeplinită.

b) Remarcând că $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^n}>0$, deducem că $0<x_n<\dfrac{1}{n}$ (oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}$ şi $n\ge 2$). Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, conform criteriului majorării, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Având în vedere că x_n este rădăcina ecuației $x^n+nx-1=0$, deducem că $x_n^n+nx_n-1=0$, ceea ce conduce la $nx_n=1-x_n^n$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x_n^n)$. Ținând seama şi de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$ (căci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$), conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty}n\,x_n=1$.

35. a) ***Se consideră funcția continuă*** $f:\left[\frac{1}{2},\ 2\right]\to\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$. ***Arătați că există*** $c\in\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$ ***astfel încât*** $cf(c)=1$.

b) ***Fie funcția continuă*** $f:\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}\right]\to\left[\frac{1}{3},\ 3\right]$. ***Arătați că există*** $c\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}\right]$ ***astfel încât*** $c^2f(c)=1$.

c) ***Se consideră funcția continuă*** $f:\left[\frac{1}{3},\ 1\right]\to[1,\ 3]$. ***Arătați că există*** $c\in\left[\frac{1}{3},\ 1\right]$ ***astfel încât*** $f(c)=4-\frac{1}{c}$.

Soluție: a) Să considerăm funcția auxiliară $g:\left[\frac{1}{2},\ 2\right]\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=xf(x)-1$. Deoarece $g\left(\frac{1}{2}\right)\le 0$ (căci $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)-1$ și $f\left(\frac{1}{2}\right)\le 2$), $g(2)\ge 0$ (fiindcă $g(2)=2f(2)-1$ și $f(2)\ge\frac{1}{2}$), iar g este continuă pe $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$ (pentru că f este continuă pe $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$), rezultă că există $c\in\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$ astfel încât $g(c)=0$. Remarcând și faptul că $g(c)=cf(c)-1$, deducem că $cf(c)=1$.

b) Să considerăm funcția auxiliară $g:\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}\right]\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=x^2f(x)-1$. Întrucât $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\le 0$ (căci $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-1$ și $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\le 3$), $g\left(\sqrt{3}\right)\ge 0$ (fiindcă $g\left(\sqrt{3}\right)=3f\left(\sqrt{3}\right)-1$ și $f\left(\sqrt{3}\right)\ge\frac{1}{3}$), iar g este continuă pe $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}\right]$, rezultă că există $c\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}\right]$ astfel încât $g(c)=0$. Având în vedere și faptul că $g(c)=c^2f(c)-1$, deducem că $c^2f(c)=1$.

c) Să considerăm funcția auxiliară $g:\left[\frac{1}{3},\ 1\right]\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=f(x)+\frac{1}{x}-4$. Evidențiind faptul că $g\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)-1\ge 0$, $g(1)=f(1)-3\le 0$, iar funcția g este continuă pe $\left[\frac{1}{3},\ 1\right]$, deducem că există $c\in\left[\frac{1}{3},\ 1\right]$ astfel încât $g(c)=0$. Cum $g(c)=f(c)+\frac{1}{c}-4$, rezultă că $f(c)=4-\frac{1}{c}$.

36. a) ***Se consideră funcția continuă*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$. ***Arătați că, dacă*** $f(-1)=-3$ ***și*** $f(1)=3$, ***atunci există*** $c\in(-1,\ 1)$ ***astfel încât*** $f(c)=2c^3$.

b) ***Se consideră funcția continuă*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$. ***Arătați că, dacă*** $f(-1)=f(3)$, ***atunci există*** $c\in[-1,\ 1]$ ***astfel încât*** $f(c+2)=f(c)$.

c) ***Fie*** $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ ***astfel încât*** $a<b$ ***și*** $ab>0$. ***Arătați că, dacă funcția*** $f:[a,\ b]\to[a,\ b]$ ***este continuă, atunci există*** $c\in[a,\ b]$ ***astfel încât*** $cf(c)=ab$.

d) ***Fie*** $a\in(0,\ \infty)$ ***și funcția continuă*** $f:[-a,\ a]\to[-a,\ a]$. ***Arătați că există*** $b,\ c\in[-a,\ a]$ ***astfel încât*** $f(b)=b$ ***și*** $f(c)=-c$.

Soluție: a) Să considerăm funcția auxiliară $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=f(x)-2x^3$. Deoarece f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că și g este continuă pe $\boldsymbol{R}$. Remarcând și faptul că $g(-1)=f(-1)+2=-3+2=-1<0$, iar $g(1)=f(1)-2=1>0$, deducem că există $c\in(-1,\ 1)$ astfel încât $g(c)=0$. Cum $g(c)=f(c)-2c^3$, rezultă că $f(c)=2c^3$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

b) Să considerăm funcția auxiliară $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ g(x)=f(x+2)-f(x)$. Întrucât funcția f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că g este continuă pe $\boldsymbol{R}$. Evidențiind și faptul că $g(-1)g(1)=\big(f(1)-f(-1)\big)\big(f(3)-f(1)\big)=$ $=\big(f(1)-f(-1)\big)\big(f(-1)-f(1)\big)=-\big(f(1)-f(-1)\big)^2\le 0$, deducem că există $c\in[-1,\ 1]$ astfel încât $g(c)=0$. Cum $g(c)=f(c+2)-f(c)$, rezultă că $f(c+2)=f(c)$.

c) Să considerăm funcția auxiliară $g:[a,\ b]\to\boldsymbol{R},\ g(x)=xf(x)-ab$. Având în vedere că f este continuă pe $[a,\ b]$, deducem că și g este continuă pe $[a,\ b]$. Remarcând și faptul că $g(a)g(b)=$ $=ab\big(f(a)-b\big)\big(f(b)-a\big)\le 0$ (căci $a\le f(x)\le b$, oricare ar fi $x\in[a,\ b]$, implică $f(a)\le b$ și $f(b)\ge a$) conchidem că există $c\in[a,\ b]$ astfel încât $g(c)=0$. Cum $g(c)=cf(c)-ab$, rezultă că $cf(c)=ab$.

d) Fie funcția auxiliară $g:[-a,\ a]\to\boldsymbol{R},\ g(x)=f(x)-x$. Evident, g este continuă pe $[-a,\ a]$. Remarcând și faptul că $g(-a)=f(-a)+a\ge 0$, iar $g(a)=f(a)-a\le 0$ (căci $-a\le f(x)\le a$, oricare ar fi $x\in[-a,\ a]$), deducem că există $b\in[-a,\ a]$ astfel încât $g(b)=0$. $g(b)=f(b)-b$, rezultă că $f(b)=b$. Să considerăm funcția auxiliară $h:[-a,\ a]\to\boldsymbol{R},\ h(x)=f(x)+x$. Remarcăm, mai întâi, că h este continuă pe $[-a,\ a]$. Evidențiind și faptul că $h(-a)=f(-a)-a\le 0$, iar $h(a)=f(a)+a\ge 0$, conchidem că există $c\in[-a,\ a]$ astfel încât $h(c)=0$, ceea ce conduce la $f(c)=-c$.

37. ***Fie*** $f:[0,\ 1]\to[0,\ 1]\cup[2,\ 3]$ ***o funcție continuă astfel încât*** $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$***. Arătați că*:**

a) f ***nu este surjectivă*;**
b) f ***nu este strict monotonă;***
c) f ***nu este injectivă*.**

Soluție: a) Deoarece f este continuă, rezultă că f duce intervalul $[0,\ 1]$ tot într-un interval; fie acesta I. Având în vedere că $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ și $0\in[0,\ 1]$, deducem că $I\subset[0,\ 1]$, ceea ce arată că f nu este surjectivă.

b) Presupunem, din contra, că f este strict monotonă. Dacă f este strict crescătoare, atunci $f(0)<f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, ceea ce nu este posibil (căci $f(x)\ge 0$, oricare ar fi $x\in[0,\ 1]$). Dacă f este strict descrescătoare, atunci $f(1)<f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, ceea ce, de asemenea, nu este posibil. Deci, presupunerea făcută este falsă și, deci, f nu este strict monotonă.

c) Presupunem, din contra, că f este injectivă. Atunci, valoarea 0 este luată o singură dată. Cum $f(x)\ge 0$, oricare ar fi $x\in[0,\ 1]$ și $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, rezultă că $f(0)>0$ și $f(1)>0$. Pentru fixare să presupunem că $f(0)<f(1)$. Fie $b\in\big(0,\ f(0)\big)$. Având în vedere că $0=f\left(\frac{1}{2}\right)$ și că f este continuă, există $a_1\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ astfel încât $f(a_1)=b$. Totodată, $b\in\big(0,\ f(1)\big)$. Deci, există $a_2\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ astfel încât $f(a_2)=b$. Contradicția la care s-a ajuns arată că presupunerea făcută este falsă. Drept urmare, f nu este injectivă.

38. ***Arătați că nici una dintre următoarele funcții nu are proprietatea lui Darboux*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\operatorname{sgn}x$**;** **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=[x]$**;**

c) $f:[-1,\ 2]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & ,\ x\in[-1,\ 1]\\ 3x & ,\ x\in(1,\ 2]\end{cases}$**;** **d)** $f:[0,\ 2]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}3x-2 & ,\ x\in[0,\ 1]\\ x^2+2x & ,\ x\in(1,\ 2]\end{cases}$**;**

e) $f:[-1,\ 1)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x+[x]$**;** **f)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}2x & ,\ x\in\boldsymbol{Q}\\ x^2 & ,\ x\in\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}\end{cases}$**.**

Soluție: a) Deoarece $\operatorname{Im} f = \{-1,\ 0,\ 1\}$, iar mulțimea $\{-1,\ 0,\ 1\}$ nu este interval, rezultă că f nu are proprietatea lui Darboux.

b) Având în vedere că $\operatorname{Im} f = \boldsymbol{Z}$ și că mulțimea $\boldsymbol{Z}$ nu este interval, deducem că f nu are proprietatea lui Darboux.

c) Remarcăm, mai întâi, că f nu este continuă pe $[-1,\ 2]$ (căci $x=1$ este punct de discontinuitate al lui f). Evident, $f(-1)=-3$ și $f(2)=6$, iar $2\in(-3,\ 6)$. Să cercetăm dacă există $x\in[-1,\ 2]$ astfel încât $f(x)=2$. Dacă $x\in[-1,\ 1]$, atunci $f(x)=2 \Leftrightarrow 2x-1=2 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. Cum $\frac{3}{2}\notin[-1,\ 1]$, rezultă că, în acest caz, $f(x)$ nu ia valoarea 2. Dacă $x\in(1,\ 2]$, atunci $f(x)=2 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$. Având în vedere că $\frac{2}{3}\notin(1,\ 2]$, nici în acest caz, $f(x)$ nu ia valoarea 2. Drept urmare, f nu are proprietatea lui Darboux.

d) Se arată cu uşurinţă că f este discontinuă în $x=1$. Remarcăm, mai întâi, că $f(0)=-2$, $f(2)=8$ şi că $3\in(-2,\ 8)$. Să cercetăm dacă există $x\in[0,\ 2]$ astfel încât $f(x)=3$. Dacă $x\in[0,\ 1]$, atunci $f(x)=3 \Leftrightarrow 3x-2=3 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$. Cum $\frac{5}{3}\notin[0,\ 1]$, rezultă că, în acest caz, $f(x)$ nu ia valoarea 3. Dacă $x\in(1,\ 2]$, atunci $f(x)=3 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=-3$ sau $x=1$. Având în vedere că atât $-3\notin(1,\ 2]$, cât şi $1\notin(1,\ 2]$, nici în acest caz, $f(x)$ nu ia valoarea 3. Prin urmare, f nu are proprietatea lui Darboux.

e) Remarcăm, mai întâi, că $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\in[-1,\ 0) \\ 0, & x=0 \\ x, & x\in(0,\ 1) \end{cases}$ şi că f este discontinuă în $x=0$. Evident, $f(-1)=-2$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ şi $-1\in\left(-2,\ \frac{1}{2}\right)$. Se arată cu uşurinţă că $f(x)\neq -1$ atât pentru $x\in[-1,\ 0)$, cât şi pentru $x\in[0,\ 1)$. Deci, f nu are proprietatea lui Darboux.

f) Arătăm, mai întâi, că f este continuă doar în $x=0$ şi $x=2$. Remarcăm şi faptul că $f\left(\sqrt{8}\right)=8$, $f(3)=6$ şi că $7\in(6,\ 8)$. Să cercetăm dacă există $x\in\left(\sqrt{8},\ 3\right)$ astfel încât $f(x)=7$. Dacă $x\in\boldsymbol{Q}$, atunci $f(x)=7 \Leftrightarrow 2x=7 \Leftrightarrow x=3{,}5$. Cum $3{,}5\notin\left(\sqrt{8},\ 3\right)$ rezultă că, în acest caz, $f(x)$ nu ia valoarea 7. Dacă $x\in\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$, atunci $f(x)=7 \Leftrightarrow x^2=7 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}$. Având în vedere că atât $-\sqrt{7}\notin\left(\sqrt{8},\ 3\right)$, cât şi $\sqrt{7}\notin\left(\sqrt{8},\ 3\right)$, deducem că, şi în acest caz, $f(x)$ nu ia valoarea 7. Prin urmare, f nu are proprietatea lui Darboux.

39. ***Arătaţi că fiecare dintre următoarele funcţii este mărginită*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sin x\cos 3x$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$;

c) $f:[-1,\ 2]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2-2x+3$;

d) $f:[-1,\ 3]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2^{x^2-2x-1}$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2\operatorname{arctg} x$.

Soluție: a) Deoarece $|f(x)|=|\sin x||\cos 3x|\le 1$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, rezultă că funcția f este mărginită.

b) Remarcând că $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\le 1$ (oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$), deducem că $\left|\frac{4x}{x^2+1}\right|\le 2$, ceea ce este totuna cu $|f(x)|\le 2$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Deci, funcția f este mărginită.

c) Remarcăm, mai întâi, că f este strict descrescătoare pe $[-1,\ 1]$ şi strict crescătoare pe $[1,\ 2]$. Evidenţiind şi faptul că f este continuă pe $[1,\ 2]$, deducem că $f(x)\ge f(1)=2$, iar $f(x)\le\max\left(f(-1),\ f(2)\right)=6$. Rezultă că $2\le f(x)\le 6$, oricare ar fi $x\in[-1,\ 2]$, ceea ce arată că f este mărginită.

d) Să considerăm funcția auxiliară $g:[-1,\ 3]\to \boldsymbol{R},\ \ g(x)=x^2-2x-1$. Se arată cu ușurință că g este strict descrescătoare pe $[-1,\ 1]$ și strict crescătoare pe $[1,\ 3]$. Cum g este continuă pe $[-1,\ 3]$, rezultă că $g(x)\geq g(1)=-2$, iar $g(x)\leq \max\big(g(-1),\ g(3)\big)=2$, rezultă că $-2\leq g(x)\leq 2$, oricare ar fi $x\in[-1,\ 3]$. Ținând seama și de faptul că $2>1$, conchidem că $2^{-2}\leq 2^{g(x)}\leq 2^2$, oricare ar fi $x\in[-1,\ 3]$, ceea ce conduce la $\frac{1}{4}\leq f(x)\leq 4$, oricare ar fi $x\in[-1,\ 3]$. Deci, funcția f este mărginită.

e) Este binecunoscut faptul că funcția f este continuă și strict crescătoare . Având în vedere și faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\pi$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pi$, deducem că $-\pi<f(x)<\pi$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Drept urmare, funcția f este mărginită.

40. ***Arătați că fiecare dintre următoarele funcții este mărginită și, apoi, determinați marginile respectivei funcții*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\sin x\cos 2x$**;** **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\sin x-\cos 2x$**.**

Soluție: a) Deoarece $|f(x)|=|\sin x||\cos 2x|\leq 1\cdot 1=1$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, rezultă că $-1\leq f(x)\leq 1$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, ceea ce arată că funcția f este mărginită. Având în vedere și faptul că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\pi=-1$, iar $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(-\pi)=-\sin\frac{\pi}{2}\cos\pi=1$, deducem că -1 și 1 sunt marginile funcției f.

b) Întrucât $|f(x)|=|\sin x-\cos 2x|\leq|\sin x|+|\cos 2x|\leq 2$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, rezultă că funcția f este mărginită. Remarcăm faptul că $f(x)=2\sin^2 x+\sin x-1$ și că $-1\leq\sin x\leq 1$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Să considerăm funcția auxiliară $g:[-1,\ 1]\to\boldsymbol{R},\ \ g(t)=2t^2+t-1$. Se arată cu ușurință că $g(t)\geq g\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{8}$ și că $g(t)\leq\max\big(g(-1),\ g(1)\big)=2$, oricare ar fi $t\in[-1,\ 1]$. Drept urmare, $\min f(x)=-\frac{9}{8}$, iar $\max f(x)=2$.

41. a) ***Fie*** $a>0$ ***și funcția*** $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=x^3-x+1$**.** ***Arătați că funcția*** f ***este mărginită pe intervalul*** $[0,\ a]$**.** ***Este*** f ***mărginită și pe*** $[0,\ \infty)$**?**

b) ***Fie*** $a\in(0,\ 1)$ ***și funcția*** $f:(0,\ 1]\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\frac{1}{x}$**.** ***Arătați că funcția*** f ***este mărginită pe intervalul*** $[a,\ 1]$**.** ***Este*** f ***mărginită și pe intervalul*** $(0,\ 1)$**?**

Soluție: a) Întrucât f este continuă pe $[0,\ a]$, iar intervalul $[0,\ a]$ este compact, rezultă că funcția f este mărginită pe $[0,\ a]$. Remarcând că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, deducem că funcția f este nemărginită pe $[0,\ \infty)$.

b) Având în vedere că funcția f este continuă pe $[a,\ 1]$, iar intervalul $[a,\ 1]$ este compact, deducem că funcția f este mărginită pe $[a,\ 1]$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\infty$, rezultă că funcția f este nemărginită pe intervalul $(0,\ 1)$.

42. ***Determinați*** $\operatorname{Im} f$ ***pentru fiecare dintre următoarele funcții*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=x^3+x-1$**;** **b)** $f:(1,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=x^3+x^2-2$**;**

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=x^4+x^2-2$**;** **d)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\frac{x^3+x-2}{x^2+1}$**;**

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\frac{4x}{x^2+4}$**;** **f)** $f:(2,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\frac{x+1}{x-2}$**;**

g) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=e^{-x}-\ln x$**.**

Soluție: a) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, iar f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că $\operatorname{Im} f=\boldsymbol{R}$.

b) Având în vedere că f este continuă şi crescătoare pe $(1,\ \infty)$, iar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, deducem că $\operatorname{Im} f=(0,\ \infty)$.

c) Remarcăm, mai întâi, că $f(x)\geq -2$, oricare ar fi $x\in \boldsymbol{R}$ şi că $f(0)=-2$. Ţinând seama şi de faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, iar f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, conchidem că $\operatorname{Im} f=[-2,\ \infty)$.

d) Întrucât, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, iar f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că $\operatorname{Im} f=\boldsymbol{R}$.

e) Evidenţiind faptul că $f(x)-1=-\dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}\leq 0$ şi $f(x)+1=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}\geq 0$ (oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$), deducem că $-1\leq f(x)\leq 1$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Având în vedere şi faptul că $f(-2)=-1,\ f(2)=1$, iar f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, conchidem că $\operatorname{Im} f=[-1,\ 1]$.

f) Pentru început, remarcăm că $f(x)=1+\dfrac{3}{x-2}>1$ (căci $x>2$), oricare ar fi $x\in(2,\ \infty)$. Ţinând seama de faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, iar f este continuă pe $(2,\ \infty)$, deducem că $\operatorname{Im} f=(1,\ \infty)$.

g) Deoarece f este continuă pe $(0,\ \infty)$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, rezultă că $\operatorname{Im} f=\boldsymbol{R}$.

43. ***Arătaţi că fiecare dintre următoarele funcţii este nemărginită*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^4-3x^3+1$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{x^3-1}$;

d) $f:(0,\ \pi)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x-e^x$;

f) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x-\ln x$.

Soluţie: a) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, rezultă că funcţia f este nemărginită.

b) Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, deducem că funcţia f este nemărginită.

c) Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\infty$, rezultă că funcţia f este nemărginită.

d) Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\infty$, deducem că funcţia f este nemărginită.

e) Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, rezultă că funcţia f este nemărginită.

f) Evidenţiind faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\infty$, deducem că funcţia f este nemărginită.

44. ***Fie*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ***o funcţie continuă astfel încât*** $f(x)\neq x$***, oricare ar fi*** $x\in\boldsymbol{R}$***. Arătaţi că funcţia*** f ***este nemărginită.***

Soluţie: Să considerăm funcţia auxiliară $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ g(x)=f(x)-x$. Deoarece g este continuă şi $g(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, rezultă că g are semn constant pe $\boldsymbol{R}$.

1) Dacă $g(x)>0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, atunci $f(x)>x$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Remarcând şi faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

2) Dacă $g(x)<0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, atunci $f(x)<x$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$, deducem că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Ca urmare a celor stabilite anterior, funcţia f este nemărginită.

Probleme propuse

1. **a)** Arătați că funcția $f:[0,\ 5]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} x-2 & ,\ x\in[0,\ 1] \\ 2x-3 & ,\ x\in(1,\ 2) \\ 3x-5 & ,\ x\in[2,\ 5] \end{cases}$ este continuă atât în $x=1$, cât şi în $x=2$.

b) Demonstrați că funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2 & ,\ x\in(-\infty,\ 1]\cup[3,\ \infty) \\ 4x-3 & ,\ x\in(1,\ 3) \end{cases}$ este continuă atât în $x=1$, cât şi în $x=3$.

2. **a)** Arătați că funcția $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right] & ,\ x\in(0,\ \infty) \\ 1 & ,\ x=0 \end{cases}$ este continuă în $x=0$.

b) Demonstrați că funcția $f:[-1,\ 1]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x^2}}{2\sqrt{2}(1-\cos x)} & ,\ x\in[-1,\ 1]\setminus\{0\} \\ 1 & ,\ x=0 \end{cases}$ este continuă în $x=0$.

3. Se consideră funcțiile $f,\ g:D\to\boldsymbol{R}$ şi $x_0\in D$. Arătați că, dacă funcțiile $f+g$ şi $f-g$ sunt continue în x_0, atunci şi funcțiile $f,\ g$ sunt continue în x_0.

4. Se consideră funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ cu proprietatea că $x\le f(x)\le x+x^2$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

a) Arătați că $f(0)=0$ şi că f este continuă în $x=0$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

5. **a)** Arătați că funcția $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} 2x+1 & ,\ x\in(0,\ 1) \\ 2 & ,\ x=1 \\ x^2+x+1 & ,\ x\in(1,\ \infty) \end{cases}$ are în $x=1$ o discontinuitate de speța întâi.

b) Demonstrați că funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & ,\ x\in(-\infty,\ 2) \\ -3 & ,\ x=2 \\ \dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x^2-3x+2} & ,\ x\in(2,\ \infty) \end{cases}$ are în $x=2$ o discontinuitate de speța întâi.

6. **a)** Arătați că funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x^2} & ,\ x\ne 0 \\ 1 & ,\ x=0 \end{cases}$ are în $x=0$ o discontinuitate de speța a doua.

b) Demonstrați că funcția $f:(1,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-4} & ,\ x\in(1,\ 2) \\ 2 & ,\ x=2 \\ 2^{\frac{1}{x-2}} & ,\ x\in(2,\ \infty) \end{cases}$ are în $x=2$ o discontinuitate de speța a doua.

7. Studiați continuitatea fiecăreia dintre următoarele funcții în punctul indicat în dreptul ei:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}2x^2-x+1 & ,\ x\in(-\infty,\ 1)\\ 3x-1 & ,\ x\in[1,\ \infty)\end{cases}$ în $x=1$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3-2x^2+3 & ,\ x\in(-\infty,\ -1)\\ 4x+3 & ,\ x\in[-1,\ \infty)\end{cases}$ în $x=-1$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}(x-1)e^x+2 & ,\ x\in(-\infty,\ 1)\\ 3 & ,\ x=1\\ x^2+1 & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$ în $x=1$;

d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}3x+1 & ,\ x\in(-\infty,\ 1]\\ \dfrac{\sin(x^2-1)}{\sqrt{x}-1} & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$ în $x=1$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4-x}-2}{x} & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ x^2-\dfrac{1}{4} & ,\ x\in[0,\ \infty)\end{cases}$ în $x=0$;

f) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}(x^2-x)\sin\dfrac{1}{x} & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ 1 & ,\ x\in[0,\ \infty)\end{cases}$ în $x=0$;

g) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{|x|}} & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$ în $x=0$;

h) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}(1+\cos x)^{\frac{1}{x}} & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ 1-\cos x & ,\ x\in[0,\ \infty)\end{cases}$ în $x=0$.

8. Studiați continuitatea următoarelor funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x\,|\,x-1\,|+|\,x-2\,|$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{4} & ,\ x\in(-\infty,\ 1]\\ \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$;

d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x+e^x & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ 2x+1 & ,\ x\in[0,\ 1]\\ (x-1)\ln x+x & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-x-1}{x} & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ x^2-1 & ,\ x\in[0,\ \infty)\end{cases}$;

f) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{4} & ,\ x\in(-\infty,\ 1]\\ \dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2+2x-3} & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$.

9. Studiați continuitatea următoarelor funcții:

a) $f:[0,\ \infty)\to \boldsymbol{R},\ \ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-18}{x^2-9} & ,\ x\in[0,\ 3)\\ \dfrac{3}{2} & ,\ x=3\\ \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{\text{x-3}} & ,\ x\in(3,\ \infty)\end{cases}$;

b) $f:(-\pi,\ \pi)\to \boldsymbol{R},\ \ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3\sin\dfrac{1}{x}}{1-\cos x} & ,\ x\neq 0\\ 1 & ,\ x=0\end{cases}$;

c) $f:(0,\ \pi)\to \boldsymbol{R},\ \ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{\sin x}}{x-\dfrac{\pi}{2}} & ,\ x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & ,\ x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$;

d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}} & ,\ x\in(-\infty,\ 1)\\ 0 & ,\ x=1\\ \dfrac{1}{(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}} & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\begin{cases}1+xe^{\frac{1}{x}} & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ 1 & ,\ x=0\\ \dfrac{\ln(3-2\cos x)}{x^2} & ,\ x\in(0,\ \infty)\end{cases}$.

10. Studiați continuitatea următoarelor funcții:

a) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n+3x^2+1}{x^{n+1}+2x}$; **b)** $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^{n+1}}{1+x+x^2+\ldots+x^n}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^n}{x^{2n}+1}$.

11. Studiați continuitatea următoarelor funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+e^{nx}}{1+e^{nx}}$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{xe^{nx}+x^2e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x-2|+xe^{-nx}}{|x+1|+e^{-nx}}$.

12. Determinați $a\in\boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\begin{cases}3x^2-ax+1 & ,\ x\in(-\infty,\ 1)\\ ax+2 & ,\ x\in[1,\ \infty)\end{cases}$ să fie continuă în $x=1$.

13. Determinați $a\in\boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin a(x^2-1)}{x+1} & ,\ x\neq -1\\ 2 & ,\ x=-1\end{cases}$ să fie continuă în $x=-1$.

14. Determinați $a \in \boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2ax - 1 & , x \in (-\infty, 1] \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & , x \in (1, \infty) \end{cases}$ să fie continuă pe $\boldsymbol{R}$.

15. Determinați $a \in \boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - 4}{x-2} & , x \in (-\infty, 2) \\ a\ln(x+2) & , x \in [2, \infty) \end{cases}$ să fie continuă pe $\boldsymbol{R}$.

16. Determinați $a,\ b \in \boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + a & , x \in (-\infty, 1) \\ 1 & , x = 1 \\ bx + 3 & , x \in (1, \infty) \end{cases}$ să fie continuă în $x = 1$.

17. Determinați $a,\ b \in \boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & , x \in (-\infty, 0) \\ b & , x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{ax} & , x \in (0, \infty) \end{cases}$ să fie continuă în $x = 0$.

18. Determinați $a,\ b \in \boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + a}{x-3} & , x \neq 3 \\ b & , x = 3 \end{cases}$ să fie continuă pe $\boldsymbol{R}$.

19. Determinați $a,\ b \in \boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 2} - a}{x-1} & , x < 1 \\ bx + \dfrac{7}{4} & , x \geq 1 \end{cases}$ să fie continuă pe $\boldsymbol{R}$.

20. Determinați $a,\ b \in \boldsymbol{R}_+$, astfel încât funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - ax}{x-2} & , x \in (-\infty, 2) \\ \ln(bx+4) - x & , x \in [2, \infty) \end{cases}$ să fie continuă pe $\boldsymbol{R}$.

21. Se consideră funcțiile $f,\ g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $g(x) = \operatorname{sgn} x$. Studiați continuitatea funcțiilor $f \circ g$ și $g \circ f$.

22. Se consideră funcțiile $f,\ g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \sin(\pi x)$, $g(x) = [x]$. Studiați continuitatea funcțiilor f, g, $f \circ g$ și $g \circ f$.

23. Se consideră funcția $f,\ g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & , x \in \boldsymbol{Q} \\ 2 - x & , x \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q} \end{cases}$. Studiați continuitatea funcțiilor f și $f \circ f$.

24. Prelungiți prin continuitate fiecare dintre următoarele funcții în punctul indicat în dreptul ei:

a) $f : \boldsymbol{R}^* \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin^2 x$ în $x = 0$;

b) $f : \boldsymbol{R}^* \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{|x|}$ în $x = 0$;

c) $f : \boldsymbol{R} \setminus \{1\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$ în $x = 1$;

d) $f : \boldsymbol{R} \setminus \{3\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{2^x - 8}{x - 3}$ în $x = 3$.

25. Arătați că nici una dintre următoarele funcții nu se poate fi prelungită prin continuitate în punctul indicat în dreptul ei:

a) $f:\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin x$ în $x=0$;

b) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{2\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{(x-2)^2}$ în $x=2$;

c) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ în $x=1$;

d) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ în $x=1$;

e) $f:\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x}$ în $x=0$.

26. Determinați funcția continuă $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, știind că $f(0)=\dfrac{5\pi}{3}$ și $\cos f(x)=\dfrac{1}{2}$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

27. Studiați semnul fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^3-3x+2$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^4-5x^2+4$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=|2x-1|-|x-2|$;

d) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-2,\ 2\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}$;

e) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{0,\ 3\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x^2}$.

28. Studiați semnul fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f:[-2,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x+2}$;

b) $f:(-\infty,\ 0]\cup[2,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-2x}-x+1$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=2x+1-2\sqrt{x^2+x+1}$;

d) $f:[0,\ 4)\cup(4,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-4}$.

29. Studiați semnul fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=4^x-2^{x+1}-8$;

b) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\lg^2 x-\lg x$;

c) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{3^x-3}$;

d) $f:(0,\ 2)\cup(2,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-2}$;

e) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{0,\ 1\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{9^x-4\cdot3^x+3}$;

f) $f:(1,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=(2^x-4)\ln(x-1)$.

30. Rezolvați inecuațiile:

a) $x^3-x^2-4x+4<0$;

b) $|3x-1|\le|x+1|$;

c) $\dfrac{x^2-5x+4}{x+2}\le0$;

d) $(x+1)(4^x-2^x-2)<0$;

e) $\dfrac{x-1}{\ln x-1}>0$;

f) $(x^2-7x+12)\lg(x-2)\ge0$;

g) $x+\sqrt{x-1}<3$;

h) $\sqrt{2x-x^2}\le2-x$.

31. a) Determinați valorile lui $x\in[0,\ 2\pi)$ pentru care $2\sin x-1\ge0$.

b) Determinați valorile lui $x\in[0,\ 2\pi)$ pentru care $\cos x+\cos2x\ge0$.

c) Determinați valorile lui $x\in\boldsymbol{R}$ pentru care $\sqrt{2}\cos x-1\le0$.

d) Determinați valorile lui $x\in\boldsymbol{R}$ pentru care $\sin2x+\cos x<0$.

32. Arătați că fiecare dintre următoarele ecuații are cel puțin o rădăcină în intervalul indicat în dreptul ei:

a) $x^3+x+1=0$ în $(-1,\ 0)$;

b) $x\cdot2^x-1=0$ în $(0,\ 1)$;

c) $3\sin x-x-1=0$ în $\left(0,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$;

d) $e^x+\sin x-3=0$ în $(0,\ 1)$;

e) $x+\ln x=0$ în $(0,\ 1)$.

33. **a)** Se consideră funcția continuă $f:\left[\frac{1}{3},\ 3\right]\to\left[\frac{2}{3},\ 6\right]$. Arătați că există $c\in\left[\frac{1}{3},\ 3\right]$ astfel încât $cf(c)=2$.

b) Se consideră funcția continuă $f:\left[\frac{1}{2},\ 1\right]\to[2,\ 3]$. Arătați că există $c\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ astfel încât $f(c)=\frac{1}{c}+1$.

c) Se consideră funcția continuă $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$. Arătați că, dacă f este mărginită, atunci există $c\in\boldsymbol{R}$ astfel încât $f(c)=c$.

d) Se consideră funcțiile continue $f,\ g:[a,\ b]\to[a,\ b]$. Demonstrați că, dacă $g(a)=a$ și $g(b)=b$, atunci ecuația $f(x)-g(x)=0$ are cel puțin o soluție.

34. Arătați că nici una dintre următoarele funcții nu are proprietatea lui Darboux:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}-2 & ,\ x\le 1\\ 1 & ,\ x>1\end{cases}$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x-1 & ,\ x<0\\ 1 & ,\ x\ge 0\end{cases}$;

c) $f:\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}1 & ,\ x=0\\ x^2 & ,\ x\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right)\end{cases}$;

d) $f:[0,\ 3]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x & ,\ x\in[0,\ 1]\\ x+1 & ,\ x\in(1,\ 3]\end{cases}$;

e) $f:[0,\ 2]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}3x-1 & ,\ x\in[0,\ 1]\\ x^2+x+1 & ,\ x\in(1,\ 2]\end{cases}$.

35. Arătați că fiecare dintre următoarele funcții este mărginită:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2\cos x+\cos 2x$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{4x}{x^2+4}$;

c) $f:\left[0,\ 2\sqrt{3}\right]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+4}$;

d) $f:[-2,\ 1]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2+2x+3$;

e) $f:[-1,\ 2]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+2}$.

36. Arătați că fiecare dintre următoarele funcții este mărginită și, apoi, determinați marginile respectivei funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sin 3x\cos 2x$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$;

c) $f:\left[0,\ 2\sqrt{2}\right]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+1}$;

d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\cos 2x-2\cos x$.

37. **a)** Fie $a<1$ și funcția $f:(-\infty,\ 1]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^4-3x^2+1$. Arătați că funcția f este mărginită pe intervalul $[a,\ 1]$. Este f mărginită și pe intervalul $(-\infty,\ 1]$?

b) Fie $a\in(2,\ 3)$ și funcția $f:(2,\ 3]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{2x}{x-2}$. Arătați că funcția f este mărginită pe intervalul $[a,\ 3]$. Este f mărginită și pe intervalul $(2,\ 3]$?

38. Determinați $\operatorname{Im} f$ pentru fiecare dintre următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^3-2x$;

b) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^4+x^3-1$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^4+2x^2-1$;

d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{2x^3}{3x^2+1}$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$; **f)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^{-x}-x$;

g) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x+\ln x$; **h)** $f:(0,\ \pi)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2\sin x+1$.

39. Arătați că fiecare dintre următoarele funcții este nemărginită:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^5-4x^3+1$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+3}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$; **d)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^x+x$;

e) $f:(0,\ \pi)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$; **f)** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x+\ln x$.

40. Fie $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, o funcție continuă astfel încât ecuația $f(x)=2x+1$ să nu aibă nici o rădăcină în $\boldsymbol{R}$. Arătați că funcția f este nemărginită.

Răspunsuri

4. b) 1 **7. a)** continuă; **b)** discontinuă; **c)** discontinuă; **d)** continuă; **e)** continuă; **f)** discontinuă; **g)** continuă; **h)** continuă **8. a)** continuă pe $\boldsymbol{R}$; **b)** continuă pe $\boldsymbol{R}$; **c)** continuă pe $\boldsymbol{R}$; **d)** continuă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$; **e)** continuă pe $\boldsymbol{R}$; **f)** continuă pe $\boldsymbol{R}$ **9. a)** continuă pe $[0,\ \infty)$; **b)** continuă pe $(-\pi,\ 0)\cup(0,\ \pi)$; **c)** continuă pe $(0,\ \pi)$; **d)** continuă pe $\boldsymbol{R}$; **e)** continuă pe $\boldsymbol{R}$ **10. a)** continuă pe $(0,\ \infty)$; **b)** continuă pe $[0,\ \infty)$ **c)** continuă pe $\boldsymbol{R}$ **11. a)** continuă pe $\boldsymbol{R}^*$; **b)** continuă pe $\boldsymbol{R}$; **c)** continuă pe $\boldsymbol{R}^*$ **12.** $a=1$ **13.** $a=-1$ **14.** $a=1$ **15.** $a=2$ **16.** $a=-1,\ b=-2$ **17.** $a=b=1$ sau $a=b=-1$ **18.** $a=3,\ b=2$ **19.** $a=2,\ b=-1$ **20.** $a=2,\ b=6$ **21.** $f\circ g$ este continuă pe $\boldsymbol{R}^*$, iar $g\circ f$ este continuă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-2,\ 1\}$ **22.** f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, g este continuă pe $\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Z}$, $f\circ g$ este continuă pe $\boldsymbol{R}$, $g\circ f$ este continuă pe $\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}+2k,\ \dfrac{1}{2}+2k\ \middle|\ k\in\boldsymbol{Z}\right\}$ **23.** f este continuă doar în $x=1$, iar $f\circ f$ este continuă pe $\boldsymbol{R}$

24. a) $\overline{f}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \overline{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin^2 x & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$; **b)** $\overline{f}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \overline{f}(x)=\begin{cases}2\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{|x|} & ,\ x\neq 0\\ \pi & ,\ x=0\end{cases}$;

c) $\overline{f}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \overline{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^3-x^2+x-1} & ,\ x\neq 1\\ \dfrac{1}{4} & ,\ x=1\end{cases}$; **d)** $\overline{f}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \overline{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-8}{x-3} & ,\ x\neq 3\\ 8\ln 2 & ,\ x=3\end{cases}$ **26.** $f(x)=\dfrac{5\pi}{3}$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$ **27. a)** $f(x)<0$ dacă $x\in(-\infty,\ -2)$, iar $f(x)>0$ dacă $x\in(-2,\ 1)\cup(1,\ \infty)$; **b)** $f(x)<0$ dacă $x\in(-2,\ -1)\cup(1,\ 2)$, iar $f(x)>0$ dacă $x\in(-\infty,\ -2)\cup(-1,\ 1)\cup(2,\ \infty)$ **c)** $f(x)<0$ dacă $x\in(-1,\ 1)$, iar $f(x)>0$ dacă $x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)$; **d)** $f(x)<0$ dacă $x\in(-3,\ -2)\cup(1,\ 2)$, iar $f(x)>0$ dacă $x\in(-\infty,\ -3)\cup(-2,\ 1)\cup(2,\ \infty)$; **e)** $f(x)<0$ dacă $x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ 3)$, iar $f(x)>0$

dacă $x \in (-1,\ 0) \cup (0,\ 1) \cup (3,\ \infty)$ **28. a)** $f(x) < 0$ dacă $x \in (-2,\ 2)$, iar $f(x) > 0$ dacă $x \in (2,\ \infty)$; **b)** $f(x) < 0$ dacă $x \in (2,\ \infty)$, iar $f(x) > 0$ dacă $x \in (-\infty,\ 0)$; **c)** $f(x) < 0$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{R}$; **d)** $f(x) < 0$ dacă $x \in (1,\ 4)$, iar $f(x) > 0$ dacă $x \in (0,\ 1) \cup (4,\ \infty)$ **29. a)** $f(x) < 0$ dacă $x \in (-\infty,\ 2)$, iar $f(x) > 0$ dacă $x \in (2,\ \infty)$; **b)** $f(x) < 0$ dacă $x \in (1,\ 10)$, iar $f(x) > 0$ dacă $x \in (0,\ 1) \cup (10,\ \infty)$; **c)** $f(x) < 0$ dacă $x \in (1,\ 2)$, iar $f(x) > 0$ dacă $x \in (-\infty,\ 1) \cup (2,\ \infty)$; **d)** $f(x) < 0$ dacă $x \in (1,\ 2)$, iar $f(x) > 0$ dacă $x \in (0,\ 1) \cup (2,\ \infty)$; **e)** $f(x) < 0$ dacă $x \in (-\infty,\ -1) \cup (0,\ 1)$, iar $f(x) > 0$ dacă $x \in (-1,\ 0) \cup (1,\ \infty)$; **f)** $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (1,\ \infty) \setminus \{2\}$ **30.a)** $x \in (-\infty,\ -2) \cup (1,\ 2)$; **b)** $x \in [0,\ 1]$; **c)** $x \in (-\infty,\ -2) \cup [1,\ 4]$; **d)** $x \in (-1,\ 1)$; **e)** $x \in (0,\ 1) \cup (e,\ \infty)$; **f)** $x \in \{3\} \cup [4,\ \infty)$; **g)** $x \in [1,\ 2)$; **h)** $x \in [0,\ 1] \cup \{2\}$ **31. a)** $x \in \left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$; **b)** $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{3}\right] \cup \{\pi\} \cup \left[\frac{5\pi}{3},\ 2\pi\right)$;

c) $x \in \bigcup_{k \in Z} \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right]$; **d)** $x \in \bigcup_{k \in Z} \left(\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)\right)$

38. a) $\boldsymbol{R}$; **b)** $(-1,\ \infty)$; **c)** $[-1,\ \infty)$ **d)** $\boldsymbol{R}$; **e)** $\left[-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right]$; **f)** $\boldsymbol{R}$; **g)** $\boldsymbol{R}$; **h)** $(1,\ 3]$.

CAPITOLUL IX

FUNCȚII DERIVABILE

Probleme rezolvate

1. ***Se consideră funcțiile:***

$$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=2x^2+5x+2,\ \ \ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ g(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}\ \ \textbf{şi}\ \ h:\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\to\boldsymbol{R},\ \ h(x)=\operatorname{tg}x\,.$$

Folosind definiția derivatei unei funcții într-un punct, calculați $f'(-1),\ \ g'(1)$ ***şi*** $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ (fiind o funcție polinomială). Cum $f'(-1)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$, rezultă că $f'(-1)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(2x+3)(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(2x+3)=1$.

Deoarece g este o funcție rațională, ea este derivabilă pe tot domeniul ei de definiție, adică pe $\boldsymbol{R}$. Remarcând că $g'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$, deducem că $g'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{2x+1}{x^2+2}-1}{x-1}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2+2)}=$

$=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+2}=0$. Evident, h este derivabilă pe $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Întrucât $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$, rezultă

că $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x}=\sqrt{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\sqrt{2}\cdot1\cdot\sqrt{2}=2$.

2. ***Se consideră funcțiile:***

$$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\sqrt{x^2-2x+6},\quad g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad g(x)=e^{x^2-1}$$

$$\textbf{şi}\quad h:\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\to\boldsymbol{R},\quad h(x)=\arcsin(4x^2-1)\,.$$

Folosind definiția derivatei unei funcții într-un punct, calculați $f'(3),\ \ g'(2)$ ***şi*** $h'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Soluție: Se arată cu uşurință că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$. Totodată $f'(3)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+3\right)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+6}+3}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$. Remarcăm, mai

întâi, că g este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$. Evident, $g'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{e^{x^2-1}-e^3}{x-2}=e^3\lim\limits_{x\to2}\dfrac{e^{x^2-4}-1}{x-2}=$

$=e^3\lim\limits_{x\to2}\dfrac{e^{x^2-4}-1}{x^2-4}(x+2)=e^3\cdot1\cdot4=4e^3$. Evidențiem faptul că h este derivabilă dacă şi numai dacă $-1<4x^2-1<1$, ceea ce conduce la $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)\cup\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Cum $\frac{1}{2}\in\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, are sens să calculăm

$h'\left(\frac{1}{2}\right)$. Totodată, remarcăm că $h'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{h(x)-h\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=2\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(4x^2-1)}{4x^2-1}(2x+1)=2\cdot1\cdot2=4$.

3. ***Studiați derivabilitatea funcției*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ,\ x\le 1\\ 2x^2-2x+3 & ,\ x>1\end{cases}$.

Soluție: Dacă $x\in(-\infty,\ 1)$, atunci $f(x)=2x+1$, care este o funcție derivabilă (fiind restricția unei funcții polinomiale). Dacă $x\in(1,\ \infty)$, atunci $f(x)=2x^2-2x+3$, care este o funcție derivabilă (fiind restricția unei funcții polinomiale). Rămâne să analizăm derivabilitatea funcției f în $x=1$. Ținând seama de faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(2x+1)=3$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(2x^2-2x+3)=3$ şi $f(1)=3$, rezultă că f este continuă în $x=1$. Evidențiind faptul că $f'_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{2x-2}{x-1}=2$ şi $f'_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{2x^2-2x}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}2x=2$, deducem că f este derivabilă în $x=1$ şi $f'(1)=2$.

4. ***Studiați derivabilitatea funcției*** $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3x} & ,\ x\in[0,\ 1)\\ \dfrac{5x^2}{8}+\dfrac{11}{8} & ,\ x\in[1,\ \infty)\end{cases}$.

Soluție: Dacă $x\in(0,\ 1)$, atunci $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$. Cum $x^2+3x>0$ (oricare ar fi $x\in(0,\ 1)$), rezultă că funcția f este derivabilă (fiind compusa a două funcții derivabile). Dacă $x\in(1,\ \infty)$, atunci $f(x)=\dfrac{5x^2}{8}+\dfrac{11}{8}$, care este o funcție derivabilă (fiind restricția unei funcții polinomiale). Rămâne să studiem derivabilitatea funcției f în $x=0$ şi în $x=1$. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, rezultă că f este continuă în $x=0$. Remarcând faptul că $f'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}=\infty$, deducem că f nu este derivabilă în $x=0$. Totuşi, f are derivată în $x=0$, iar acesta este ∞. Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sqrt{x^2+3x}=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\dfrac{5x^2}{8}+\dfrac{11}{8}\right)=2$ şi $f(1)=2$, rezultă că f este continuă în $x=1$. Evidențiind faptul că $f'_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x^2+3x-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+3x}+2}=\dfrac{5}{4}$ şi $f'_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\frac{5x^2}{8}+\frac{11}{8}-2}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{5(x^2-1)}{8(x-1)}=\dfrac{5}{8}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+1)=\dfrac{5}{4}$,

deducem că f este derivabilă în $x=1$ şi $f'(1)=\dfrac{5}{4}$.

5. ***Studiați derivabilitatea funcției*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x\,|\,x^2-x\,|$.

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$ (fiind produsul a două funcții continue pe $\boldsymbol{R}$). Dacă $x\in(-\infty,\ 0)\cup(1,\ \infty)$, atunci $f(x)=x(x^2-x)$, care este o funcție derivabilă (fiind restricția unei funcții polinomiale). Dacă $x\in(0,\ 1)$, atunci $f(x)=x(x-x^2)$, care este o funcție derivabilă. Rămâne să studiem derivabilitatea funcției f în $x=0$ şi în $x=1$. Deoarece $f'_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{x(x^2-x)}{x}=0$, iar

$f'_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x(x-x^2)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-x^2)=0$, rezultă că f este derivabilă în $x=0$ şi $f'(0)=0$. Evidenţiind faptul că $f'_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x(x-x^2)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(-x^2)=-1$, iar $f'_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x(x^2-x)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}x^2=1$, deducem că f nu este derivabilă în $x=1$. Ca urmare a celor stabilite anterior, funcţia f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$.

6. ***Arătaţi că funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=2x\,|\,x^2-2x\,|-|\,2x^3-x^4\,|$ ***este derivabilă pe*** $\boldsymbol{R}$.

Soluţie: Evident, $f(x)=2x\,|\,x^2-2x\,|-|\,x^2(2x-x^2)\,|=2x\,|\,x^2-2x\,|-x^2\,|\,2x-x^2\,|=|\,2x-x^2\,|(2x-x^2)$, ceea ce conduce la $f(x)=\begin{cases}-(2x-x^2)^2 & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\cup(2,\ \infty)\\ (2x-x^2)^2 & ,\ x\in[0,\ 2]\end{cases}$. Se arată cu uşurinţă că funcţia f este derivabilă atât pe $(0,\ 2)$, cât şi pe $(-\infty,\ 0)\cup(2,\ \infty)$. Deoarece $f'_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{-(2x-x^2)^2}{x}=$ $=-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}x(2-x)^2=0$, iar $f'_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{(2x-x^2)^2}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x(2x-x^2)=0$, rezultă că f este derivabilă în $x=0$ şi $f'(0)=0$. Analog, arătăm că f este derivabilă şi în $x=2$, iar $f'(2)=0$. Ca urmare a celor stabilite anterior, funcţia f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.

7. ***Se consideră funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\min(x^2-x,\ 4x-4)$. ***Stabiliţi mulţimea pe care funcţia*** f ***este derivabilă.***

Soluţie: Fie funcţia $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=x^2-x-(4x-4)$. Evident, $g(x)=x^2-5x+4$, iar $g(x)=0$ dacă $x=1$ sau $x=4$. Dacă $x\in(-\infty,\ 1)\cup(4,\ \infty)$, atunci $g(x)>0$, de unde $x^2-x>4x-4$. Deci, în acest caz, $f(x)=4x-4$. Totodată, dacă $x\in[1,\ 4]$, atunci $f(x)=x^2-x$. Deducem imediat că funcţia f este derivabilă atât pe $(-\infty,\ 1)\cup(4,\ \infty)$ cât şi pe $(1,\ 4)$. Rămâne să analizăm derivabilitatea lui f în $x=1$ şi în $x=4$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(4x-4)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x^2-x)=0$ şi $f(1)=0$, rezultă că f este continuă în $x=1$. Remarcând că $f'_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{4x-4}{x-1}=4$ şi $f'_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}x=1$, deducem că f nu este derivabilă în $x=1$. Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}(x^2-x)=12$, $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}(4x-4)=12$ şi $f(4)=12$, rezultă că f este continuă în $x=4$. Remarcând că $f'_s(4)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}\dfrac{x^2-x-12}{x-4}=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}(x+3)=7$ şi $f'_d(4)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\dfrac{4x-16}{x-4}=4$, deducem că f nu este derivabilă în $x=4$. Deci, funcţia f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{1,\ 4\}$.

8. ***Studiaţi derivabilitatea funcţiei*** $f:[2,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$.

Soluţie: Deoarece $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-2-2\sqrt{x-2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-2}-1\right|$, rezultă că $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x-2} & ,\ x\in[2,\ 3)\\ \sqrt{x-2}-1 & ,\ x\in[3,\ \infty)\end{cases}$. Se arată cu uşurinţă că f este continuă pe $[2,\ \infty)$ şi că este derivabilă pe $(2,\ 3)\cup(3,\ \infty)$. Rămâne să analizăm derivabilitatea funcţiei f în $x=2$ şi în $x=3$. Remarcând că

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{-\sqrt{x-2}}{x-2} = -\infty$, deducem că f nu este derivabilă în $x=2$.

Evidențiem şi faptul că f are derivată în $x=2$, iar $f'(2)=-\infty$. Întrucât $f'_s(3) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{-1}{1+\sqrt{x-2}} = -\dfrac{1}{2}$ şi $f'_d(3) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} = \dfrac{1}{2}$,

rezultă că f nu este derivabilă în $x=3$.

9. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x} & ,\ x\neq 1\\ 0 & ,\ x=1\end{cases}$ ***. Arătați că, deşi*** f ***este derivabilă pe*** $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$***, există*** $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$ ***şi este finită, totuşi*** f ***nu este derivabilă în*** $x=1$***.***

Soluție: Pentru $x\in(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$ funcția f este derivabilă (fiind compusa a două funcții derivabile), iar $f'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{2}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$. Totodată, $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)=\dfrac{1}{2}$. Remarcând faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$, iar

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$, deducem că f este discontinuă în $x=1$, ceea ce arată că f nu este derivabilă în $x=1$.

Din acest exemplu se desprinde concluzia că, dacă limita derivatei unei funcții într-un punct există şi este finită, nu rezultă că funcția este derivabilă în acel punct.

10. ***Dați un exemplu de funcție care să aibă derivată în orice punct din*** $\boldsymbol{R}$***, dar care să nu fie continuă pe*** $\boldsymbol{R}$***.***

Soluție: Să considerăm funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1 & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ 0 & ,\ x=0\\ x+1 & ,\ x\in(0,\ \infty)\end{cases}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x-1)=-1$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x+1)=1$, rezultă că funcția f nu are limită în $x=0$ şi, deci, nu este continuă în $x=0$. Se arată cu uşurință că f este derivabilă atât pe $(-\infty,\ 0)$, cât şi pe $(0,\ \infty)$. În consecință, f are derivată în orice punct din $\boldsymbol{R}^*$. Remarcând că $f'_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x-1}{x}=\infty$, iar

$f'_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x+1}{x}=\infty$, deducem că f are derivată şi în $x=0$, iar $f'(0)=\infty$. Drept urmare, funcția f are derivată în orice punct din $\boldsymbol{R}$. Astfel cerința enunțului a fost îndeplinită.

11. ***Determinați*** $a,\ b\in\boldsymbol{R}$***, astfel încât funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax+e^{2x} & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ x^2+3x+b & ,\ x\in[0,\ \infty)\end{cases}$ ***să fie derivabilă pe*** $\boldsymbol{R}$***.***

Soluție: Dacă $x\in(-\infty,\ 0)$, atunci $f(x)=ax+e^{2x}$, care este o funcție derivabilă (fiind suma a două funcții derivabile). Dacă $x\in(0,\ \infty)$, atunci $f(x)=x^2+3x+b$, care este o funcție derivabilă (fiind restricția unei funcții polinomiale). Ca urmare a celor stabilite anterior, funcția f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ dacă şi numai dacă este derivabilă în $x=0$. Pentru ca f să fie derivabilă în $x=0$, este necesar ca f să fie continuă în $x=0$, ceea ce impune ca $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (ax+e^{2x})=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2+3x+b)=b$, rezultă că $b=1$. Rămâne să impunem condiția ca f să aibă derivate laterale finite în

$x=0$, iar acestea să fie egale. Deoarece $f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{ax+e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(a+2\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\right)=$

$=a+2$, iar $f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x^2+3x}{x}=3$, condiția anterioară impune ca $a+2=3$, de unde $a=1$. Drept urmare, dacă $a=b=1$, atunci funcția f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.

12. ***Fie*** $a\in\boldsymbol{R}$ ***şi funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=|x-a|\sin x$. ***Determinați valorile lui*** a ***pentru care*** f ***este derivabilă pe*** $\boldsymbol{R}$.

Soluție: Cum f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{a\}$ (căci $|x-a|$ este derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{a\}$, iar $\sin x$ este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$), rezultă că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ dacă şi numai dacă f este derivabilă în $x=a$. Remarcăm, mai întâi, că f este continuă în $x=a$. Având în vedere că

$$f_s'(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{|x-a|\sin x}{x-a}=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{(a-x)\sin x}{x-a}=-\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\sin x=-\sin a,$$

iar $f_d'(a)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{(x-a)\sin x}{x-a}=\sin a$, deducem că f este derivabilă în $x=a$ atunci şi numai atunci când $-\sin a=\sin a$, de unde $\sin a=0$, ceea ce conduce la $a=k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

13. ***Arătați că funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)$ ***nu este polinomială.***

Soluție: Presupunem, din contra, că funcția f este polinomială ; fie $n=\operatorname{grad} f$ $(n\in\boldsymbol{N}^*)$. Evident, f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, iar $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Rezultă că $(x^2+1)f'(x)=2x$ (oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$), ceea ce conduce la $\operatorname{grad}\left((x^2+1)f'(x)\right)=\operatorname{grad}(2x)$, de unde $2+(n-1)=1$ (căci $\operatorname{grad} f'=n-1$). Drept urmare, $n=0$, ceea ce nu este posibil. Contradicția la care s-a ajuns arată că presupunerea făcută este falsă şi, deci, funcția f nu este polinomială.

14. ***Se consideră funcțiile*** $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ***cu proprietatea că*** $g(x)=(x^2+x+1)f(x)+x^3-x$***, oricare ar fi*** $x\in\boldsymbol{R}$.

a) ***Arătați că*** g ***este derivabilă în*** $x=1$ ***dacă şi numai dacă*** f ***este derivabilă în*** $x=1$**.**

b) ***Calculați*** $g'(1)$***, ştiind că*** $f(1)=0$ ***şi*** $f'(1)=1$**.**

Soluție: a) Dacă $x\neq 1$, atunci $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\dfrac{(x^2+x+1)f(x)+x^3-x-3f(1)}{x-1}=$

$$=\frac{(x^2+x+1)f(x)-(x^2+x+1)f(1)+x^3-x+(x^2+x-2)f(1)}{x-1}=$$

$$=(x^2+x+1)\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+x(x+1)+(x+2)f(1).$$

Remarcând şi faptul că atât $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)$, cât şi $\lim\limits_{x\to 1}\left[x(x+1)+(x+2)f(1)\right]$ există şi sunt finite, iar $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)\neq 0$, deducem că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ există şi este finită dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ există şi este finită. Deci, g este derivabilă în $x=1$ atunci şi numai atunci când f este derivabilă în $x=1$.

b) Evident, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\left[x(x+1)+(x+2)f(1)\right]$, de unde $g'(1)=3f'(1)+2+3f(1)$. Cum $f'(1)=1$ şi $f(1)=0$, rezultă că $g'(1)=5$.

15. ***Se consideră funcțiile*** $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ***cu proprietatea că*** $g(x)=x^2f(x)+\sin x$***, oricare ar fi*** $x\in\boldsymbol{R}$.

a) ***Arătați că, dacă*** f ***este derivabilă în*** $x=0$***, atunci şi*** g ***este derivabilă în*** $x=0$**.**

b) ***Dacă*** g ***este derivabilă în*** $x=0$***, este şi*** f ***derivabilă în*** $x=0$ **?**

Soluție: a) Fie $x \neq 0$. Cum $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 f(x)+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(xf(x) + \dfrac{\sin x}{x} \right)$, iar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ există și este finită (căci f este continuă în $x=0$) și $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ există și este finită. Deci, g este derivabilă în $x=0$.

b) Răspunsul la întrebarea din enunț este negativ. Pentru a arăta aceasta, vom lua $f(x)=|x|$ și $g(x)=x^2|x|+\sin x$. Este binecunoscut faptul că f nu este derivabilă în $x=0$. Pe de altă parte, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2|x|+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(x|x| + \dfrac{\sin x}{x} \right) = 0+1=1$, ceea ce arată că g este derivabilă în $x=0$.

16. ***Fie*** $f:(-1,\ 1)\to \boldsymbol{R}$ ***o funcție derivabilă în*** $x=0$**.** ***Calculați*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$**.**

Soluție: Se observă cu ușurință că $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)+f(0)-f(-x)}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} + \dfrac{f(0)-f(-x)}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} + \dfrac{f(-x)-f(0)}{-x}$. Cum f este derivabilă în $x=0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$ și $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(-x)-f(0)}{-x} = f'(0)$. Drept urmare, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(-x)}{x} = 2f'(0)$.

17. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ***cu proprietatea că*** $|f(x_1)-f(x_2)| \le (x_1-x_2)^2$**,** ***oricare ar fi*** $x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R}$**.** ***Arătați că funcția*** f ***este derivabilă pe*** $\boldsymbol{R}$ ***și că*** $f'(x)=0$**,** ***oricare ar fi*** $x\in\boldsymbol{R}$**.**

Soluție: Fie x_0 un punct oarecare din $\boldsymbol{R}$. Pentru $x\neq x_0$, avem $0 \le \left| \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right| \le |x-x_0|$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$ (în baza relației din enunț). Cum $\lim\limits_{x\to x_0} |x-x_0| = 0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$, ceea ce arată că f este derivabilă în x_0 și că $f'(x_0)=0$. Ținând seama și de faptul că x_0 este arbitrar în $\boldsymbol{R}$, conchidem că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ și că $f'(x)=0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

18. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ***cu proprietatea că*** $|f(x)-e^x| \le 2x^2$**,** ***oricare ar fi*** $x\in\boldsymbol{R}$**.** ***Arătați că funcția*** f ***este derivabilă în*** $x=0$ ***și că*** $f'(0)=1$**.**

Soluție: Făcând $x=0$ în relația din enunț, deducem că $|f(0)-1|\le 0$. Cum $|f(0)-1|\ge 0$, rezultă că $|f(0)-1|=0$, de unde $f(0)=1$. Evident, $|f(x)-e^x| \le 2x^2 \Leftrightarrow -2x^2 \le f(x)-e^x \le 2x^2$, ceea ce conduce la $-2x^2+e^x \le f(x) \le 2x^2+e^x$, de unde $-2x^2+e^x-1 \le f(x)-f(0) \le 2x^2+e^x-1$ (oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$). Să considerăm $x<0$. Împărțind ultima relație prin x, obținem $2x+\dfrac{e^x-1}{x} \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le -2x+\dfrac{e^x-1}{x}$ (oricare ar fi $x\in(-\infty,\ 0)$). Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(2x+\dfrac{e^x-1}{x} \right) = 1$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(-2x+\dfrac{e^x-1}{x} \right) = 1$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 1$, ceea ce arată că f este derivabilă la stânga în $x=0$, iar $f_s'(0)=1$. Analog, stabilim că f este derivabilă la dreapta în $x=0$, iar $f_d'(0)=1$. Deci, f este derivabilă în $x=0$, iar $f'(0)=1$.

19. ***Fie*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ***o funcție derivabilă în*** $x=0$ ***și funcția*** $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$**.** ***Arătați***

că funcția $f\circ g$ *este derivabilă în* $x=0$ *şi că* $(f\circ g)'(0)=0$.

Soluție: Întrucât $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$, rezultă că funcția g este continuă în $x=0$. Remarcând faptul că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$, deducem că g este derivabilă în $x=0$, iar $g'(0)=0$. Cum funcțiile f şi g sunt derivabile în $x=0$, rezultă că şi funcția $f\circ g$ este derivabilă în $x=0$. Evidențiind şi faptul că $(f\circ g)'(0)=f'\big(g(0)\big)\cdot g'(0)$, conchidem că $(f\circ g)'(0)=0$.

20. ***Calculați*****:**

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2e^x-e}{x-1}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin\sqrt{1-x^2}-\frac{\pi}{3}}{2x-1}$.

Soluție: a) Trecând formal la limită, obținem nedeterminarea $\dfrac{0}{0}$. Pentru eliminarea ei, vom folosi funcția derivabilă $f:(-3,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt{x+3}$. Evident $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$. Întrucât $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$, rezultă că $f'(1)=\dfrac{1}{4}$. Deci, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\dfrac{1}{4}$.

b) Trecând formal la limită, obținem nedeterminarea $\dfrac{0}{0}$. Pentru eliminarea ei, vom folosi funcția derivabilă $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^2e^x$. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2e^x-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ şi că $f'(1)=3e$ (căci $f'(x)=2xe^x+x^2e^x$), deducem că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2e^x-e}{x-1}=3e$.

c) Pentru început, evidențiem faptul că limita considerată conduce la nedeterminarea $\dfrac{0}{0}$. Eliminarea ei, impune folosirea funcției derivabile $f:(0,\ 1)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$. Remarcând că $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin\sqrt{1-x^2}-\frac{\pi}{3}}{2x-1}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin\sqrt{1-x^2}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ şi că $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (fiindcă $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$), deducem că $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin\sqrt{1-x^2}-\frac{\pi}{3}}{2x-1}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

21. ***Calculați*****:**

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(x^2-x+1)-\ln 3}{x+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{x^2-e^2\ln x}{x-e}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$.

Soluție: a) Trecând formal la limită, obținem nedeterminarea $\dfrac{0}{0}$. Pentru eliminarea ei, vom folosi funcția derivabilă $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\ln(x^2-x+1)$. Evident, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(x^2-x+1)-\ln 3}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=$ $=f'(-1)$. Cum $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$, rezultă că $f'(-1)=-1$, deci $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(x^2-x+1)-\ln 3}{x+1}=-1$.

b) Fie funcția derivabilă $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^2-e^2\ln x$. Evident, $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{x^2-e^2\ln x}{x-e}=$

$= \lim\limits_{x\to e} \dfrac{f(x)-f(e)}{x-e} = f'(e)$. Având în vedere că $f'(x) = 2x - \dfrac{e^2}{x}$, rezultă că $f'(e) = e$. Ca atare, $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{x^2 - e^2 \ln x}{x-e} = e$.

c) Remarcăm, mai întâi, faptul că limita considerată conduce la nedeterminarea $\dfrac{0}{0}$. Pentru eliminarea ei, vom folosi funcția derivabilă $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Se observă cu uşurință că $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1} =$ $= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$. Ținând seama de faptul că $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, rezultă că $f'(1) = 1$. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1} = 1$.

22. ***Fie*** $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ ***şi funcția*** $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = e^x(a\cos 2x + b\sin 2x)$. ***Determinați*** a ***şi*** b***, ştiind că*** $f'(x) = -5e^x \sin 2x$.

Soluție: Evident,

$$f'(x) = e^x(a\cos 2x + b\sin 2x) + e^x(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x) = e^x\left[(a+2b)\cos 2x + (b-2a)\sin 2x\right].$$

Cum $f'(x) = -5e^x \sin 2x$, rezultă că $a + 2b = 0$ şi $b - 2a = -5$, de unde $a = 2$ şi $b = -1$.

23. ***Fie*** $a \in \boldsymbol{R}$ ***şi funcția*** $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = xe^{ax}$. ***Determinați*** a ***ştiind că*** $f'(x) - f(x) = e^x$***, oricare ar fi*** $x \in \boldsymbol{R}$.

Soluție: Întrucât $f'(x) = e^{ax} + axe^{ax}$, condiția din enunț conduce la $\left[(a-1)x + 1\right]e^{(a-1)x} = 1$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{R}$. Având în vedere că ultima egalitate trebuie să aibă loc pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$, ea trebuie să fie îndeplinită atât pentru $x = 1$, cât şi pentru $x = -1$. Rezultă că $ae^{a-1} = 1$, respectiv $(2-a)e^{1-a} = 1$, ceea ce implică $a(2-a) = 1$, de unde $a = 1$. Deci, $f(x) = xe^x$. Cum această funcție verifică condiția $f'(x) - f(x) = e^x$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{R}$, rezultă că $a = 1$ este soluția problemei.

24. ***Fie*** $P: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ***o funcție polinomială şi funcția*** $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = e^x P(x)$. ***Determinați funcția*** P***, ştiind că*** $f(x) + 2f'(x) = (3x^2 + x + 4)e^x$***, oricare ar fi*** $x \in \boldsymbol{R}$.

Soluție: Deoarece $f'(x) = e^x\left(P(x) + P'(x)\right)$, rezultă că $f(x) + 2f'(x) = \left(3P(x) + 2P'(x)\right)e^x$. Totodată, $f(x) + 2f'(x) = (3x^2 + x + 4)e^x$, deci $3P(x) + 2P'(x) = 3x^2 + x + 4$. Evident, această egalitate este posibilă numai dacă $\operatorname{grad} P = 2$, de unde $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$ şi $a \neq 0$). Atunci $3P(x) + 2P'(x) =$ $= 3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c$. Ca urmare a celor stabilite anterior, deducem că $3ax^2 + (4a+3b)x + 2b + 3c =$ $= 3x^2 + x + 4$. Cum ultima egalitate trebuie să aibă loc pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$, rezultă că $3a = 3,\ 4a + 3b = 1$ şi $2b + 3c = 4$, de unde $a = 1,\ b = -1$ şi $c = 2$. Drept urmare, $P(x) = x^2 - x + 2$.

25. ***Fie*** $P: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ***o funcție polinomială şi funcția*** $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = P(x)\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. ***Determinați funcția polinomială*** P***, ştiind că*** $f'(x) = (6x+2)\sqrt{x^2+1}$.

Soluție: Pentru început, remarcăm faptul că $f'(x) = P'(x)\sqrt{x^2+1} + \dfrac{xP(x)}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$ $= P'(x)\sqrt{x^2+1} + \dfrac{xP(x)}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{(x^2+1)P'(x) + xP(x) + 1}{\sqrt{x^2+1}}$. Cum $f'(x) = (6x+2)\sqrt{x^2+1}$, rezultă că $(x^2+1)P'(x) + xP(x) + 1 = 6x^3 + 2x^2 + 6x + 2$. Fie $n = \operatorname{grad} P$. Atunci, $\operatorname{grad} P' = n - 1$, iar

$\text{grad}\left[(x^2+1)P'(x)+xP(x)+1\right]=n+1$. Totodată, $\text{grad}\left(6x^3+2x^2+6x+2\right)=3$, deci $n=2$, iar $P(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$ şi $a\neq 0$).

Ca urmare a celor stabilite anterior, $(x^2+1)(2ax+b)+x(ax^2+bx+c)+1=6x^3+2x^2+6x+2$, ceea ce conduce la $3ax^3+2bx^2+(2a+c)x+b+1=6x^3+2x^2+6x+2$. Având în vedere că această egalitate are loc oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, deducem că $3a=6,\ 2b=2,\ 2a+c=6$ şi $b+1=2$, de unde $a=2,\ b=1$ şi $c=2$. În consecinţă, $P(x)=2x^2+x+2$.

26. ***Se consideră funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^3+x$.

a) ***Arătaţi că funcţia*** f ***este inversabilă.***

b) ***Fie*** $g=f^{-1}$. ***Calculaţi*** $g'(2)$.

Soluţie: a) Fie $x_1,\ x_2\in\boldsymbol{R}$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)$. Deoarece $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^3+x_1=x_2^3+x_2\Rightarrow$ $\Rightarrow (x_1^3-x_2^3)+(x_1-x_2)=0\Rightarrow (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1)=0\Rightarrow x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$ (căci $x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1=$ $=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}+1\neq 0$), rezultă că f este injectivă. Remarcând faptul că funcţia f este continuă şi că $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, iar $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, deducem că $\text{Im}\,f=\boldsymbol{R}$, ceea ce arată că funcţia f este surjectivă. Deci, funcţia f este bijectivă şi, deci, inversabilă.

b) Fie $x_0=g(2)$. Atunci, $f(x_0)=2$. Totodată, $f(1)=2$. Rezultă că $f(x_0)=f(1)$, de unde $x_0=1$ (fiindcă f este injectivă). Evidenţiind faptul că, dacă $y_0=f(x_0)$ şi $f'(x_0)\neq 0$, atunci $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$, conchidem că $g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$.

27. ***Se consideră funcţia*** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x-\frac{2}{x}$.

a) ***Arătaţi că funcţia*** f ***este inversabilă.***

b) ***Fie*** $g=f^{-1}$. ***Calculaţi*** $g'(1)$.

Soluţie: a) Fie $x_1,\ x_2\in(0,\ \infty)$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)$. Deoarece $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1-\frac{2}{x_1}=x_2-\frac{2}{x_2}\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1-x_2+\left(\frac{2}{x_2}-\frac{2}{x_1}\right)=0\Rightarrow (x_1-x_2)\left(1+\frac{2}{x_1x_2}\right)=0\Rightarrow x_1=x_2$ (căci $x_1>0$ şi $x_2>0$ $\Rightarrow$ $1+\frac{2}{x_1x_2}\neq 0$),

rezultă că f este injectivă. Evidenţiind faptul că funcţia f este continuă şi că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x-\frac{2}{x}\right)=-\infty$

(fiindcă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2}{x}=\infty$), iar $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, deducem că $\text{Im}\,f=\boldsymbol{R}$, ceea ce arată că funcţia f este surjectivă. Deci, funcţia f este bijectivă şi, deci, inversabilă.

b) Remarcăm faptul că g este derivabilă (căci f este derivabilă şi $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}\neq 0$). Fie $x_0=g(1)$. Atunci, $f(x_0)=1$. Totodată, $f(2)=1$. Rezultă că $f(x_0)=f(2)$, de unde $x_0=2$ (fiindcă f este injectivă). Având în vedere că, dacă $y_0=f(x_0)$ şi $f'(x_0)\neq 0$, atunci $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$, conchidem că $g'(1)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{2}{3}$ (căci $f'(2)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$).

28. ***Calculaţi derivata fiecăreia dintre funcţiile*****:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x$;

b) $f:[-1,\ 1]\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$;

c) $f:(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\ln\dfrac{x-1}{x+1}+2\ \operatorname{arctg} x$;

d) $f:(-1,\ \infty)\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \operatorname{arctg}\ \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

Soluție: a) Evident, funcția f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, iar

$$f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x-2\sin x-2x\cos x+2\sin x=-x^2\sin x.$$

b) Remarcăm că funcția f este derivabilă pe $(-1,\ 1)$ și că

$$f'(x)=(\arcsin x)^2+\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+2\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-2=(\arcsin x)^2.$$

c) Se arată cu ușurință că funcția f este derivabilă pe tot domeniul ei de definiție. Totodată,

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}+\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}+\frac{2}{x^2+1}=\frac{-4x}{x^4-1}+\frac{2}{x^2-1}+\frac{2}{x^2+1}=$$

$$=\frac{-4x+2(x^2+1)+2(x^2-1)}{x^4-1}=\frac{4x^2-4x}{x^4-1}=\frac{4x}{(x+1)(x^2+1)}.$$

d) Evidențiem faptul că funcția f este derivabilă pe $(-1,\ \infty)$ și că $f(x)=\dfrac{1}{3}\ln(x+1)-$

$-\dfrac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \operatorname{arctg}\ \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Rezultă că $f'(x)=\dfrac{1}{3(x+1)}-\dfrac{2x-1}{6(x^2-x+1)}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{(2x-1)^2}{3}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=$

$$=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1-2x}{6(x^2-x+1)}+\frac{1}{2(x^2-x+1)}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2-x}{3(x^2-x+1)}=\frac{x^2-x+1+(2-x)(x+1)}{3(x^3+1)}=\frac{1}{x^3+1}.$$

29. ***Calculați derivata fiecăreia dintre funcțiile*:**

a) $f:\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}+\dfrac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x}$;

b) $f:\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$;

c) $f:\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\arcsin\dfrac{2\sin x+1}{\sin x+2}$;

d) $f:\boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=2\operatorname{arctg} x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Soluție: a) Evident, f este derivabilă pentru $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Remarcând că $f(x)=\dfrac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}+\dfrac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}=$

$=\dfrac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin 2x$, deducem că $f'(x)=-\cos 2x$.

b) Se observă că funcția f este derivabilă pentru orice $x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Folosind regulile de derivare,

deducem că $f'(x)=\dfrac{x\sin x(\cos x+x\sin x)-x\cos x(\sin x-x\cos x)}{(\cos x+x\sin x)^2}=\dfrac{x^2\sin^2 x+x^2\cos^2 x}{(\cos x+x\sin x)^2}=\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$.

c) Arătăm, mai întâi, că $-1<\dfrac{2\sin x+1}{\sin x+2}<1$, oricare ar fi $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Rezultă că f este derivabilă pe

tot domeniul de definiție. Evident, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sin x+1}{\sin x+2}\right)^2}}\cdot\dfrac{2\cos x(\sin x+2)-\cos x(2\sin x+1)}{(\sin x+2)^2}=$

$=\dfrac{\sin x+2}{\sqrt{3(1-\sin^2 x)}}\cdot\dfrac{3\cos x}{(\sin x+2)^2}=\dfrac{3\cos x}{\sqrt{3}\,|\cos x|\,(\sin x+2)}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin x+2}$ (căci $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\cos x>0$).

d) Funcția $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ este derivabilă dacă și numai dacă $-1<\frac{2x}{1+x^2}<1$, ceea ce conduce la $(x+1)^2>0$ și $(x-1)^2>0$, de unde $x\neq -1$ și $x\neq 1$. Deci, funcția f este derivabilă pentru orice $x\in \boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}$. Remarcăm și faptul că $f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=$

$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{\sqrt{(x^2-1)^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2(1-x^2)}{|x^2-1|(1+x^2)}$. Dacă $x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)$, atunci $f'(x)=\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{1+x^2}=0$, iar dacă $x\in(-1,\ 1)$, atunci $f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{4}{1+x^2}$.

30. ***Demonstrați egalitățile*****:**

a) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=n2^{n-1}$**;** **b)** $1+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n=(n+2)2^{n-1}$**.**

Soluție: a) Derivând ambii membri ai egalității $(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots+C_n^nx^n$ (adevărată oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$), obținem $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\ldots+nC_n^nx^{n-1}$. Făcând $x=1$ în ultima egalitate, deducem că $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=n2^{n-1}$, ceea ce trebuia demonstrat.

b) Derivând ambii membri ai egalității $x(1+x)^n=x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+C_n^3x^4+\ldots+C_n^nx^{n+1}$ (adevărată oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$), obținem $1+2C_n^1x+3C_n^2x^2+\ldots+(n+1)C_n^nx^n=(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}$. Făcând $x=1$ în ultima egalitate, deducem că $1+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n=2^n+n2^{n-1}=(n+2)2^{n-1}$. Astfel cerința enunțului a fost îndeplinită.

31. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$**,** $f(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n\ \ (n\in\boldsymbol{N}^*)$**.**

a) ***Arătați că*** $f(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$**, oricare ar fi** $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$**.**

b) ***Calculați*** $f'(x)$ ***și, apoi, deduceți că*** $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$**, oricare ar fi** $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$**.**

c) ***Calculați suma*** $S_n=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^{n-1}}$ ***și, apoi, determinați*** $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$**.**

Soluție: a) Deoarece $(x-1)f(x)=x^{n+1}-1$, rezultă că $f(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\ \ (x\neq 1)$.

b) Remarcând că $f'(x)=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$ și că, totodată, $f'(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, egalitatea din enunț este demonstrată.

c) Făcând $x=\frac{1}{3}$ în egalitatea de la b), deducem că $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\ldots+\frac{n}{3^{n-1}}=\frac{\frac{n}{3^{n+1}}-\frac{n+1}{3^n}+1}{\frac{4}{9}}=$

$=\frac{n-3n-3+3^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{9}{4}=\frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot3^{n-1}}$, ceea ce arată că $S_n=\frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot3^{n-1}}$. Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{2n+3}{3^{n-1}}}{4}=\frac{9}{4}.$$

32. ***Fie*** $a\in\boldsymbol{R}$ ***și funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$**,** $f(x)=\frac{ax+8}{x^2+2}$**.** ***Determinați*** a***, astfel încât tangenta la graficul***

lui f ***în punctul*** $M\left(2,\ f(2)\right)$ ***să formeze cu axa*** Ox ***un unghi cu măsura*** $\frac{3\pi}{4}$**.**

Soluție: Fie m panta tangentei la graficul lui f în punctul $M\left(2,\ f(2)\right)$. Întrucât $m=f'(2)$, iar $f'(x)=\frac{-ax^2-16x+2a}{(x^2+2)^2}$, rezultă că $m=-\frac{a+16}{18}$. Totodată, $m=\text{tg}\,\frac{3\pi}{4}=-1$. Deci $\frac{a+16}{18}=1$, de unde $a=2$.

33. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ $(a,\ b\in\boldsymbol{R})$ ***şi dreapta*** h ***având ecuația*** $2x-2y-1=0$**.** ***Determinați*** a ***şi*** b**,** ***astfel încât dreapta*** h ***să fie tangentă la*** G_f ***în punctul*** $M\left(1,\ f(1)\right)$**.**

Soluție: Deoarece $f(1)=\frac{a+b}{2}$, rezultă că $M\left(1,\ \frac{a+b}{2}\right)$. Fie m panta tangentei în M. Având în vedere că $m=f'(1)$ şi că $f'(x)=\frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$, deducem că $m=\frac{-b}{2}$. Prin urmare, ecuația tangentei în M la G_f este $y-\frac{a+b}{2}=-\frac{b}{2}(x-1)$, ceea ce este totuna cu $bx+2y-(a+2b)=0$. Cum această tangentă trebuie să fie chiar dreapta h, rezultă că $\frac{b}{2}=\frac{2}{-2}=\frac{-(a+2b)}{-1}$, de unde $a=3$ şi $b=-2$.

34. ***Fie*** m ***un parametru real şi funcția*** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{x^3-3x^2+m}{x-1}$**.** ***Determinați valorile lui*** m ***pentru care*** G_f ***este tangent axei*** Ox**.**

Soluție: Fie $M(a,\ 0)$ $(a\neq 1)$ punctul în care G_f este tangent axei Ox. Deoarece $M\in G_f$, rezultă că $f(a)=0$, ceea ce conduce la $a^3-3a^2+m=0$. Remarcăm şi faptul că, dacă G_f este tangent axei Ox în punctul M, atunci $f'(a)=0$, de unde $2a^3-6a^2+6a-m=0$ (căci $f'(x)=\frac{2x^3-6x^2+6x-m}{(x-1)^2}$). Adunând egalitățile anterioare membru cu membru, obținem $a^3-3a^2+2a=0$, ceea ce conduce la $a=0$ sau $a^2-3a+2=0$, de unde $a=0$ sau $a=2$ (fiindcă $a=1$ nu convine). Dacă $a=0$, atunci $m=0$ (căci $a^3-3a^2+m=0$), iar dacă $a=2$, atunci $m=4$.

35. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x-2$ ***şi dreapta*** h ***având ecuația*** $2x+2y-3=0$**.** ***Determinați punctele de pe*** G_f ***în care tangenta la*** G_f ***este paralelă cu dreapta*** h**.**

Soluție: Fie $A\left(a,\ f(a)\right)$ unul dintre punctele ce posedă proprietatea menționată în enunțul problemei, iar m panta tangentei în A la G_f. Întrucât $m=f'(a)$, iar $f'(x)=x^3+2x^2-x-3$, rezultă că $m=a^3+2a^2-a-3$. Remarcăm şi faptul că $m_h=-1$. Evident, tangenta în A la G_f este paralelă cu dreapta h dacă $m=m_h$, ceea ce conduce la $a^3+2a^2-a-2=0$. Având în vedere că ultima egalitate este echivalentă cu $(a+2)(a^2-1)=0$, deducem că $a=-2$ sau $a=-1$ sau $a=1$. Cum $f(-2)=\frac{2}{3}$, $f(-1)=\frac{1}{12}$ şi $f(1)=-\frac{55}{12}$, rezultă că punctele căutate sunt $A\left(-2,\ \frac{2}{3}\right)$, $A'\left(-1,\ \frac{1}{12}\right)$ şi $A''\left(1,\ -\frac{55}{12}\right)$.

36. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=(2x-1)e^{-x}$**.** ***Aflați tangentele la*** G_f ***care trec prin punctul*** $O(0,\ 0)$**.**

Soluție: Fie $M(a,\ f(a))$ unul dintre punctele cu proprietatea că tangenta în M la G_f trece prin punctul $O(0,\ 0)$. Ecuația tangentei în M la G_f este $y-f(a)=f'(a)(x-a)$. Evident, această dreaptă trece prin $O(0,\ 0)$ dacă şi numai dacă $-f(a)=-af'(a)$, ceea ce este totuna cu $af'(a)-f(a)=0$. Cum $f(a)=(2a-1)e^{-a}$, iar $f'(a)=(3-2a)e^{-a}$ (căci $f'(x)=(3-2x)e^{-x}$), rezultă că $a(3-2a)e^{-a}-(2a-1)e^{-a}=0$, ceea ce conduce la $2a^2-a-1=0$ (fiindcă $e^{-a}\neq 0$), de unde $a=-\frac{1}{2}$ sau $a=1$. Ca urmare a celor stabilite anterior, două dintre tangentele la G_f trec prin punctul O, iar ecuațiile lor sunt $y-4\sqrt{e}x=0$, respectiv $ey-x=0$.

37. ***Se consideră funcția*** $f:\left(0,\ \frac{1}{e}\right)\cup\left(\frac{1}{e},\ \infty\right)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{1+\ln x}$. ***Determinați tangentele la*** G_f ***cu proprietatea că fiecare dintre ele trece prin punctul*** $A(0,\ -1)$.

Soluție: Fie $M(a,\ f(a))$ unul dintre punctele cu proprietatea că tangenta în M la G_f trece prin punctul $A(0,\ -1)$. Deoarece $f'(x)=\frac{1}{x(1+\ln x)^2}$, rezultă că ecuația tangentei în punctul M la G_f este $y-\frac{\ln a}{1+\ln a}=\frac{1}{a(1+\ln a)^2}(x-a)$. Din faptul că punctul $A(0,\ -1)$ aparține acestei tangente deducem că $-1-\frac{\ln a}{1+\ln a}=\frac{-1}{(1+\ln a)^2}$, ceea ce conduce la $2\ln^2 a+3\ln a=0$, de unde $a=1$ sau $a=e^{-\frac{3}{2}}$. Drept urmare, există două tangente la G_f care au proprietatea menționată în enunț, iar ele au ecuațiile $y=x-1$, respectiv $y=4e\sqrt{e}x-1$.

38. ***Se consideră funcțiile*** $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2+2,\ g(x)=x^2-4x+2$.

a) ***Arătați că graficele celor două funcții au un punct comun şi, apoi, determinați ecuațiile tangentelor în punctul comun la cele două grafice.***

b) ***Cercetați dacă există o dreaptă care să fie tangentă ambelor grafice. În caz afirmativ, aflați ecuația acestei tangente.***

Soluție: a) Rezolvând sistemul format din ecuațiile $y=x^2+2$ şi $y=x^2-4x+2$, obținem $x=0$ şi $y=2$. Deci, cele două grafice au un punct comun, iar acesta este $M(0,\ 2)$. Deoarece $f(0)=2,\ g(0)=2,$ $f'(0)=0$ şi $g'(0)=-4$, rezultă că ecuațiile tangentelor în M la G_f şi G_g sunt $y-2=0$, respectiv $4x+y-2=0$.

b) Din cele stabilite le a) rezultă că tangenta comună (dacă există) nu este cea în punctul comun celor două grafice. Rămâne să cercetăm dacă există două puncte distincte A şi B ($A\in G_f$ şi $B\in G_g$) astfel încât tangenta în A la G_f să coincidă cu tangenta în B la G_g. Fie a abscisa lui A şi b abscisa lui B. Atunci, ecuația tangentei în A la G_f este $y-f(a)=f'(a)(x-a)$, ceea ce este totuna cu $f'(a)x-y+f(a)-af'(a)=0$. Analog, ecuația tangentei în B la G_g este $g'(b)x-y+g(b)-bg'(b)=0$. Evident, cele două tangente coincid dacă şi numai dacă $f'(a)=g'(b)$ şi $f(a)-af'(a)=g(b)-bg'(b)$. Remarcând şi faptul că $f(a)=a^2+2,\ g(b)=b^2-4b+2,\ f'(a)=2a$ şi $g'(b)=2b-4$, deducem că $a=b-2$ şi $a^2=b^2$, de unde $a=-1$ şi $b=1$. Ca urmare a celor stabilite anterior, cele două grafice au o tangentă comună, iar ecuația ei este $2x+y-1=0$.

39. ***Fie*** m ***un parametru real şi funcțiile*** $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2,\ g(x)=-x^2+4x+m$. ***Determinați valoarea lui*** m ***pentru care graficele celor două funcții au o tangentă comună într-un punct. Aflați, apoi, ecuația tangentei comune.***

Soluție: Graficele celor două funcții au măcar un punct comun dacă şi numai dacă sistemul format din ecuațiile $y=x^2$ şi $y=-x^2+4x+m$ are măcar o soluție în $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$. Pentru aceasta, este necesar ca ecuația

$2x^2-4x-m=0$ să aibă rădăcinile în $\boldsymbol{R}$, ceea ce impune $16+8m\geq 0$ (căci $\Delta\geq 0$, iar $\Delta=16+8m$), de unde $m\geq -2$. Presupunem că această condiție este îndeplinită. Fie A unul dintre punctele comune celor două grafice, iar a abscisa lui. Deoarece $f(a)=a^2$, $g(a)=-a^2+4a+m$, $f'(a)=2a$ şi $g'(a)=4-2a$, rezultă că ecuația tangentei în A la G_f este $y-a^2=2a(x-a)$, iar ecuația tangentei în A la G_g este $y-(-a^2+4a+m)=(4-2a)(x-a)$. Evident, ultimele două ecuații pot fi scrise sub forma $2ax-y-a^2=0$, respectiv $(4-2a)x-y+a^2+m=0$. Drept urmare, cele două tangente coincid dacă şi numai dacă $\frac{2a}{4-2a}=\frac{-a^2}{a^2+m}=1$ ($a\neq 2$ şi $a^2+m\neq 0$), de unde $a=1$ şi $m=-2$. Deducem imediat că ecuația tangentei comune este $2x-y-1=0$.

40. ***Se consideră funcțiile*** $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2-3x+1,\ g(x)=-x^2+3x-3$**.**

a) ***Arătați că graficele celor două funcții au două puncte comune; fie acestea*** A ***şi*** B**.**

b) ***Determinați măsura fiecăruia dintre unghiurile formate de tangentele la*** G_f ***şi*** G_g ***atât în punctul*** A***, cât şi în punctul*** B**.**

Soluție: a) Rezolvând sistemul format din ecuațiile $y=x^2-3x+1$ şi $y=-x^2+3x-3$, deducem că $x=1,\ y=-1$ sau $x=2,\ y=-1$. Prin urmare, cele două grafice au două puncte comune, iar $A(1,\ -1)$ şi $B(2,\ -1)$.

b) Fie m_1 panta tangentei în punctul A la G_f, m_2 panta tangentei în punctul A la G_g şi φ_1 măsura (în radiani) a unghiului format de aceste tangente. Deoarece $f'(x)=2x-3,\ g'(x)=-2x+3$, iar $m_1=f'(1),\ m_2=g'(1)$, rezultă că $m_1=-1$ şi $m_2=1$. Drept urmare, cele două tangente sunt perpendiculare, iar $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$. Analog, arătăm că măsura unghiului format de tangentele în B la cele două grafice este $\frac{\pi}{2}$.

41. ***Se consideră dreapta*** h ***având ecuația*** $y=2x+3$ ***şi funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2-x-1$**.**

a) ***Arătați că dreapta*** h ***intersectează*** G_f ***în două puncte; fie acestea*** A ***şi*** B**.**

b) ***Stabiliți măsura fiecăruia dintre unghiurile formate de dreapta*** h ***şi tangentele la*** G_f ***în*** A***, respectiv*** B**.**

Soluție: a) Rezolvând sistemul format din ecuațiile $y=2x+3$ şi $y=x^2-x-1$, deducem că $x=-1,\ y=1$ sau $x=4,\ y=11$. Prin urmare, dreapta h intersectează G_f în două puncte, iar $A(-1,\ 1)$ şi $B(4,\ 11)$.

b) Fie m panta dreptei h, iar m_1 şi m_2 pantele tangentelor la G_f în A, respectiv B. Evident, $m=2$. Deoarece $f'(x)=2x-1$, iar $m_1=f'(-1)$ şi $m_2=f'(4)$, rezultă că $m_1=-3$ şi $m_2=7$. Fie φ_1 şi φ_2 măsurile (în radiani) ale unghiurilor formate de dreapta h cu tangentele la G_f în A, respectiv B. Remarcând că $\operatorname{tg}\varphi_1=\left|\frac{m_1-m}{1+m_1m}\right|=1$ şi $\operatorname{tg}\varphi_2=\left|\frac{m_2-m}{1+m_2m}\right|=\frac{1}{3}$, deducem că $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$, iar $\varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

42. ***Determinați punctele unghiulare ale fiecăruia dintre graficele următoarelor funcții*****:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=1+2|x|+x^2$**;** **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{|x^2+x-2|}{x^2+1}$**.**

Soluție: a) Evident, funcția f este derivabilă pentru orice $x\in\boldsymbol{R}^*$. Remarcând faptul că

$$f'_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{2|x|+x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-2x+x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-2+x)=-2,\qquad f'_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2x+x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(2+x)=2,$$ deducem că $A(0,\ 1)$ este punct unghiular al lui G_f.

b) Evidențiem, mai întâi, faptul că funcția g este derivabilă pentru orice $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{-2,\ 1\}$. Deoarece

$f_s'(-2)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\dfrac{|x^2+x-2|}{(x+2)(x^2+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\dfrac{x^2+x-2}{(x+2)(x^2+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\dfrac{x-1}{x^2+1}=-\dfrac{3}{5}$,

$f_d'(-2)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\dfrac{|x^2+x-2|}{(x+2)(x^2+1)}=-\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\dfrac{x^2+x-2}{(x+2)(x^2+1)}=-\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\dfrac{x-1}{x^2+1}=\dfrac{3}{5}$, rezultă că $A(-2,\ 0)$ este punct unghiular al lui G_f. Remarcând faptul că $f_s'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{-(x^2+x-2)}{(x-1)(x^2+1)}=-\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x+2}{x^2+1}=-\dfrac{3}{2}$,

$f_d'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x+2}{x^2+1}=\dfrac{3}{2}$ şi că $f(1)=0$, deducem că şi $B(1,\ 0)$ este punct unghiular al lui G_f.

43. ***Determinaţi punctele de întoarcere ale fiecăruia dintre graficele următoarelor funcţii*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x+\sqrt{|x-1|}$; **b)** $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ g(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$.

Soluţie: a) Evident, funcţia f este derivabilă pentru orice $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$. Deoarece $f_s'(1)=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x+\sqrt{|x-1|}-1}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x-1+\sqrt{1-x}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(1-\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)=-\infty$,

$f_d'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x-1+\sqrt{x-1}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)=+\infty$, rezultă că $A(1,\ 1)$ este punct de întoarcere al lui G_f.

b) Având în vedere că $x^3+3x^2-4=0\Leftrightarrow(x+2)^2(x-1)=0\Leftrightarrow x=-2$ sau $x=1$, deducem că funcţia g este derivabilă pentru orice $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{-2,\ 1\}$. Întrucât $g_s'(-2)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}}{x+2}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\sqrt[3]{\dfrac{(x+2)^2(x-1)}{(x+2)^3}}=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}=+\infty$, $g_d'(-2)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}=-\infty$, rezultă că $A(-2,\ 0)$ este punct de întoarcere al lui G_f. Ţinând seama şi de faptul că $g'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\dfrac{(x+2)^2(x-1)}{(x-1)^3}}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\dfrac{(x+2)^2}{(x-1)^2}}=+\infty$, deducem că g nu este derivabilă în $x=1$, dar are derivată în $x=1$, iar aceasta este $+\infty$.

44. ***Se consideră funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$. ***Arătaţi că*** $6f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=8$.

Soluţie: Ţinând seama de faptul că $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ şi $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, deducem că $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{3-\cos 2x}=$

$=\dfrac{4-(3-\cos 2x)}{3-\cos 2x}=\dfrac{4}{3-\cos 2x}-1$. Prin urmare $f'(x)=-\dfrac{8\sin 2x}{(3-\cos 2x)^2}$, iar

$$f''(x)=-8\frac{2\cos 2x(3-\cos 2x)^2-4\sin^2 2x(3-\cos 2x)}{(3-\cos 2x)^4}=-8\frac{2\cos 2x(3-\cos 2x)-4\sin^2 2x}{(3-\cos 2x)^3}.$$

Rezultă că $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{8}{9}$, iar $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{32}{27}$, de unde $6f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=8$.

45. ***Se consideră funcţia*** $f:(-1,\ 1)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. ***Arătaţi că*** $(1-x^2)f''(x)-3xf'(x)-f(x)=0$.

Soluţie: Derivând ambii membri ai egalităţii $\sqrt{1-x^2}f(x)=\arcsin x$, obţinem $\sqrt{1-x^2}f'(x)-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}f(x)=$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ceea ce conduce la $(1-x^2)f'(x) - x\,f(x) = 1$. Derivând ambii membri ai ultimei egalități, deducem că $(1-x^2)f''(x) - 2x\,f'(x) - x\,f'(x) - f(x) = 0$, de unde $(1-x^2)f''(x) - 3x\,f'(x) - f(x) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

46. ***Fie*** $n \in N^*$ ***şi funcția*** $f:(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty) \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n$. ***Arătați că***

$$(x^2-1)f''(x) + x\,f'(x) - n^2 f(x) = 0.$$

Soluție: Evident, $f'(x) = n\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{n\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{\sqrt{x^2-1}}$, de unde $\sqrt{x^2-1}f'(x) = nf(x)$.

Derivând ambii membri ai ultimei egalități, deducem că $\sqrt{x^2-1}f''(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}f'(x) = nf'(x)$, ceea ce conduce la $(x^2-1)f''(x) + xf'(x) = n\sqrt{x^2-1}f'(x)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $(x^2-1)f''(x) + x\,f'(x) = n^2 f(x)$, de unde $(x^2-1)f''(x) + x\,f'(x) - n^2 f(x) = 0$.

47. ***Se consideră funcția*** $f:(0,\ \infty) \to \boldsymbol{R},\ f(x) = e^{-2\,|\ln x|}$.

a) ***Arătați că*** f ***este de două ori derivabilă, oricare ar fi*** $x \in (0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$.

b) ***Fie*** $a \in \boldsymbol{R}$ ***şi funcția*** $g:(0,\ 1)\cup(1,\ \infty) \to \boldsymbol{R},\ g(x) = \frac{x^2 f''(x) + axf'(x)}{f(x)}$. ***Determinați*** a, ***astfel încât*** g ***să fie o funcție constantă.***

Soluție: a) Deoarece $x > 0$ şi $x \neq 1$, rezultă că $\ln x$ are sens şi, totodată, $\ln x \neq 0$. Deducem imediat că funcția f este de două ori derivabilă pe $(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$.

b) Fie $x \in (0,\ 1)$. Atunci, $\ln x < 0$, iar $f(x) = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$. Rezultă că $f'(x) = 2x$, iar $f''(x) = 2$, de unde $g(x) = 2a + 2$. Fie $x \in (1,\ \infty)$. În acest caz, $\ln x > 0$, iar $f(x) = e^{-2\ln x} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{e^{\ln x^2}} = \frac{1}{x^2}$. Rezultă că $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, iar $f''(x) = \frac{6}{x^4}$, de unde $g(x) = 6 - 2a$. Ca urmare a celor stabilite anterior, funcția g este constantă dacă şi numai dacă $2a + 2 = 6 - 2a$, de unde $a = 1$.

48. ***Determinați funcția polinomială*** $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ***cu proprietatea că*** $(x-1)f'(x)f''(x) = 4f(x) - 8$, ***oricare ar fi*** $x \in \boldsymbol{R}$.

Soluție: Fie $n = \operatorname{grad} f$. Atunci $\operatorname{grad} f' = n-1$ şi $\operatorname{grad} f'' = n-2$. Prin urmare, $\operatorname{grad}(4f(x)-8) = n$, iar $\operatorname{grad}\left[(x-1)f'(x)f''(x)\right] = 1 + (n-1) + (n-2) = 2n-2$, ceea ce arată că egalitatea din enunț este posibilă numai dacă $2n - 2 = n$, de unde $n = 2$. Deci, $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$ şi $a \neq 0)$. Deoarece $f'(x) = 2ax + b$ şi $f''(x) = 2a$, rezultă că $(x-1)f'(x)f''(x) = 4a^2x + 2a(b-2a)x - 2ab$. Astfel, egalitatea din enunț conduce la $4a^2x + 2a(b-2a)x - 2ab = 4ax^2 + 4bx + 4c - 8$. Având în vedere că această egalitate trebuie să aibă loc pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$, deducem că $4a^2 = 4a$, $2a(b-2a) = 4b$ şi $-2ab = 4c - 8$, de unde $a = 1,\ b = -2$ şi $c = 3$ (căci $a \neq 0$).

49. ***Fie*** $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$ ***şi funcția*** $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x < 0 \\ 2\ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$. ***Determinați*** $a,\ b$ ***şi*** c, ***astfel încât funcția*** f ***să fie de două ori derivabilă pe*** $\boldsymbol{R}$.

Soluție: Evident, f este de două ori derivabilă pe $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$. Rezultă că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ dacă şi numai dacă este de două ori derivabilă în $x = 0$. Impunem, mai întâi, condiția ca f să fie continuă în $x = 0$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (ax^2 + bx + c) = c$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 2\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x+1) = 0$ şi $f(0) = 0$,

cerința anterioară este îndeplinită dacă $c=0$. Remarcăm şi faptul că f este derivabilă în $x=0$ dacă şi numai dacă $f_s'(0)$ şi $f_d'(0)$ sunt finite, iar $f_s'(0)=f_d'(0)$. Având în vedere că $f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{ax^2+bx}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(ax+b)=b$, iar $f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{2\ln(x+1)}{x}=$

$=2\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=2\ln e=2$, deducem că $b=2$. Totodată, $f'(x)=\begin{cases}2ax+2, & x<0\\ \dfrac{2}{x+1}, & x\geq 0\end{cases}$. Deoarece

$f_s''(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{2ax}{x}=2a$, iar $f_d''(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\frac{2}{x+1}-2}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{-2}{x+1}=-2$, condiția ca f să fie de două ori derivabilă în $x=0$ impune ca $2a=-2$, de unde $a=-1$. Deci, $a=-1$, $b=2$ şi $c=0$.

50. ***Fie*** $P:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ***o funcție polinomială şi funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}P(x), & x<1\\ 2e^{x-1}, & x\geq 1\end{cases}$. ***Determinați*** P ***având gradul cel mai mic posibil, astfel încât funcția*** f ***să fie de două ori derivabilă pe*** $\boldsymbol{R}$.

Soluție: Evident, funcția f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$. Rezultă că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ dacă şi numai dacă f este de două ori derivabilă şi în $x=1$. Această cerință este îndeplinită dacă $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$, $f_s'(1)=f_d'(1)$ ($f_s'(1)$ şi $f_d'(1)$ sunt finite) şi $f_s''(1)=f_d''(1)$ ($f_s''(1)$ şi $f_d''(1)$ sunt finite). Vom rezolva problema ținând seama de gradul lui P.

1) Fie $\operatorname{grad}P=0$. Atunci, $P(x)=k$ (const.), oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=k$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=2$ şi $f(1)=2$, prima dintre cele trei condiții impuse anterior este îndeplinită dacă $k=2$. Atunci $f_s'(1)=0$, iar $f_d'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{2e^{x-1}-2}{x-1}=2\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}=2$. Cum $f_s'(1)\neq f_d'(1)$, situația considerată nu convine.

2) Fie $\operatorname{grad}P=1$. În acest caz, $P(x)=ax+b$ ($a,\ b\in\boldsymbol{R}$ şi $a\neq 0$), oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=a+b$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=2$ şi $f(1)=2$, condiția $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$ este îndeplinită dacă $a+b=2$, de unde $b=2-a$. Atunci, $f_s'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{a\,x+2-a-2}{x-1}=a$, iar $f_d'(1)=2$. Astfel cerința $f_s'(1)=f_d'(1)$ este îndeplinită dacă $a=2$ şi $b=0$. Pentru a şi b astfel determinați, $f'(x)=\begin{cases}2, & x<1\\ 2e^{x-1}, & x\geq 1\end{cases}$.

Rezultă că $f_s''(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=0$, iar $f_d''(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{2e^{x-1}-2}{x-1}=2$. Cum $f_s''(1)\neq f_d''(1)$, nici această situație nu convine.

3) Fie $\operatorname{grad}P=2$. Atunci, $P(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$ şi $a\neq 0$), oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=a+b+c$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=2$ şi $f(1)=2$, condiția $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$ este îndeplinită dacă $a+b+c=2$, de unde $c=2-a-b$. Atunci, $f_s'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{ax^2+bx+2-a-b-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\big[a(x+1)+b\big]=2a+b$, iar $f_d'(1)=2$. Prin urmare, condiția $f_s'(1)=f_d'(1)$ impune $2a+b=2$, de unde $b=2-2a$. Remarcăm şi faptul că $f'(x)=\begin{cases}2ax-2a+2, & x<1\\ 2e^{x-1}, & x\geq 1\end{cases}$. Rezultă că $f_s''(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\ =\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{2ax-2a}{x-1}=2a$, iar $f_d''(1)=2$. Deducem că cerința $f_s''(1)=f_d''(1)$ este îndeplinită dacă $2a=2$, de unde $a=1$, ceea ce implică

$b=0$ şi $c=1$ (căci $b=2-2a$ şi $c=2-a-b$). Ca urmare a celor stabilite anterior, soluția problemei este $P(x)=x^2+1$.

51. ***Fie*** $a,\ b\in\boldsymbol{R},\ a\neq 0$ ***şi funcția*** $f:\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\frac{b}{a}\right\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{1}{ax+b}$***. Calculați*** $f^{(n)}(x)$ ***(*** $n\in\boldsymbol{N}^*$***).***

Soluție: Faptul că $f'(x)=-\frac{a}{(ax+b)^2}$, $f''(x)=\frac{2a^2}{(ax+b)^3}$, $f'''(x)=-\frac{2\cdot 3a^3}{(ax+b)^4}=-\frac{3!a^3}{(ax+b)^4}$, $f^{(4)}(x)=\frac{3!4a^4}{(ax+b)^5}=\frac{4!a^4}{(ax+b)^5}$, ne sugerează că $f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$, ceea ce se demonstrează prin inducție matematică.

52. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ ***şi şirul*** $(a_n)_{n\geq 2}$ ***definit prin*** $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(1)$**.**

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$**.**

Soluție: Deoarece $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1+3}{2x+1}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+1}$, rezultă că $f^{(n)}(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{(-1)^n n!2^n}{(2x+1)^{n+1}}$, de unde $f^{(n)}(1)=\frac{3}{2}\cdot\frac{(-1)^n n!2^n}{3^{n+1}}=\frac{(-1)^n n!}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$, ceea ce arată că $a_n=\frac{(-1)^n}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Evident, $|a_n|=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Având în vedere că $0<\frac{2}{3}<1$, deducem că $|a_n|\to 0$ şi, deci, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

53. ***Calculați derivata de ordinul*** n ***(*** $n\in\boldsymbol{N}^*$***) a fiecăreia dintre funcțiile*****:**

a) $f:\boldsymbol{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{2x+1}{2x-3}$**;** **b)** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1,\ 2\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$**;**

c) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$.

Soluție: **a)** Deoarece $f(x)=1+\frac{4}{2x-3}$, rezultă că $f^{(n)}(x)=4\left(\frac{1}{2x-3}\right)^{(n)}=(-1)^n\cdot 4\frac{n!2^n}{(2x-3)^{n+1}}=$

$=(-1)^n\frac{n!2^{n+2}}{(2x-3)^{n+1}}$.

b) Evidențiind faptul că $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{x-1-(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$, deducem că

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right).$$

c) Întrucât $f(x)=\frac{x^3-x+x}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1+(x-1)}{(x-1)(x+1)}=x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$, rezultă că

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right]=\frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]\quad(n\geq 2).$$

54. ***Calculați derivata de ordinul*** n ***(*** $n\in\boldsymbol{N}^*$***) a fiecăreia dintre funcțiile*****:**

a) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1}$**;** **b)** $g:\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}\to\boldsymbol{R},\ g(x)=\frac{1}{(2x-1)^4}$**.**

Soluție: **a)** Având în vedere că $f(x)=\frac{x^2+3}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{(x-1)^2+2(x+1)}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x-1)^2}$, rezultă că

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}+2\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]^{(n)}=\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}-2\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)'\right]^{(n)}=\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}-2\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n+1)}=$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}-\frac{2(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}.$$

b) Fie $h(x)=\frac{1}{2x-1}$. Deoarece $h'(x)=-\frac{2}{(2x-1)^2}$, $h''(x)=\frac{2^2\cdot 2}{(2x-1)^3}$, $h'''(x)=-\frac{2^3\cdot 6}{(2x-1)^4}$, rezultă că $\frac{1}{(2x-1)^4}=-\frac{1}{6\cdot 2^3}h'''(x)$. Drept urmare,

$$g^{(n)}(x)=-\frac{1}{6\cdot 2^3}\left(h'''(x)\right)^{(n)}=-\frac{1}{6\cdot 2^3}\left(h(x)\right)^{(n+3)}=-\frac{1}{6\cdot 2^3}\cdot\frac{(-1)^{n+3}(n+3)!2^{n+3}}{(2x-1)^{n+4}}=\frac{(-1)^n(n+3)!2^{n-1}}{3(2x-1)^{n+4}}.$$

55. ***Calculați derivata de ordinul*** n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$ ***a fiecăreia dintre funcțiile*****:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\sin x$**;** **b)** $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=\cos x$**.**

Soluție: a) Faptul că $f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$, $f'''(x)=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$ ne sugerează că $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$, ceea ce se demonstrează prin inducție.

b) Analog, demonstrăm că $g^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$.

Observație: Arătăm cu uşurință că pentru orice $k\in\boldsymbol{R}$, avem $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+n\frac{\pi}{2}\right)$ şi $(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+n\frac{\pi}{2}\right)$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$.

56. ***Calculați derivata de ordinul*** n $(n\in \boldsymbol{N}^*)$ ***a fiecăreia dintre funcțiile*****:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\cos^3 x$**;** **b)** $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=\sin 2x(4\cos^2 x-3)$**;**

c) $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $h(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$**.**

Soluție: a) Întrucât $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$, rezultă că $f(x)=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x$, de unde $f^{(n)}(x)=\frac{1}{4}(\cos 3x)^{(n)}+\frac{3}{4}(\cos x)^{(n)}=\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{4}\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Remarcând faptul că $g(x)=2\sin x\cos x(4\cos^2 x-3)=2\sin x\cos 3x=\sin 4x-\sin 2x$, deducem că $g^{(n)}(x)=(\sin 4x)^{(n)}-(\sin 2x)^{(n)}=4^n\sin\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)-2^n\sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Cum $\cos^4 x+\sin^4 x=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$, rezultă că $h(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$, ceea ce conduce la $h^{(n)}(x)=\frac{1}{4}(\cos 4x)^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

57. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=e^{2x}\sin 2x$**.** ***Calculați*** $f^{(n)}(x)$**.**

Soluție: Faptul că $f'(x)=2e^{2x}\sin 2x+2e^{2x}\cos 2x=2e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x)=2\sqrt{2}e^{2x}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$, $f''(x)=2\sqrt{2}\left[2e^{2x}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2e^{2x}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left(2\sqrt{2}\right)^2e^{2x}\sin\left(2x+2\frac{\pi}{4}\right)$,

$f'''(x)=\left(2\sqrt{2}\right)^2\left[2e^{2x}\sin\left(2x+2\frac{\pi}{4}\right)+2e^{2x}\cos\left(2x+2\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left(2\sqrt{2}\right)^3e^{2x}\sin\left(2x+3\frac{\pi}{4}\right)$, ne sugerează că $f^{(n)}(x)=\left(2\sqrt{2}\right)^n e^{2x}\sin\left(2x+n\frac{\pi}{4}\right)$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$, ceea ce se demonstrează prin inducție matematică.

58. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=e^x\sin x$. ***Arătați că*** $f^{(n+2)}(x)-2f^{(n+1)}(x)+2f^{(n)}(x)=0$, ***oricare ar fi*** $n\in\boldsymbol{N}^*$.

Soluție: Evident, $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=f(x)+e^x\cos x$. Rezultă că $f''(x)=f'(x)+e^x\cos x-e^x\sin x=$ $=f'(x)+f'(x)-f(x)-f(x)=2f'(x)-2f(x)$, de unde $f''(x)-2f'(x)+2f(x)=0$, ceea ce implică $\left(f''(x)-2f'(x)+2f(x)\right)^{(n)}=0$. Prin urmare, $f^{(n+2)}(x)-2f^{(n+1)}(x)+2f^{(n)}(x)=0$.

59. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$. ***Arătați că***

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2C_n^1xf^{(n)}(x)+2C_n^2f^{(n-1)}(x)=0,$$

oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$.

Soluție: Deoarece $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}$, rezultă că $(x^2+1)f'(x)=1$, ceea ce implică $\left((x^2+1)f'(x)\right)^{(n)}=0$. Aplicând formula lui Leibniz şi ținând seama că $(x^2+1)'=2x$, $(x^2+1)''=2$, iar $(x^2+1)^{(k)}=0$ (oricare ar fi $k\geq 3$), deducem că $(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2C_n^1xf^{(n)}(x)+2C_n^2f^{(n-1)}(x)=0$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

60. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^2e^x$.

a) ***Calculați*** $f^{(n)}(x)$.

b) ***Calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f'(0)+f''(0)+\ldots+f^{(n)}(0)}{n^3}$.

c) ***Aflați o funcție*** $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ***indefinit derivabilă şi având proprietatea că*** $g^{(n)}(0)=n(n+1)$, ***oricare ar fi*** $n\in\boldsymbol{N}^*$.

Soluție: a) Să considerăm funcțiile $u,\ v:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $u(x)=e^x$, $v(x)=x^2$. Evident, $f(x)=u(x)v(x)$ şi $u^{(n)}(x)=e^x$, iar $v'(x)=2x$, $v''(x)=2$ şi $v^{(k)}(x)=0$ (oricare ar fi $k\geq 3$). Ținând seama de faptul că $\left(u(x)v(x)\right)^{(n)}=u^{(n)}(x)v(x)+C_n^1u^{(n-1)}(x)v'(x)+C_n^2u^{(n-2)}(x)v''(x)+C_n^3u^{(n-3)}(x)v'''(x)+\ldots+C_n^nu(x)v^{(n)}(x)$, deducem că $f^{(n)}(x)=e^xx^2+2C_n^1e^xx+2C_n^2e^x=\left(x^2+2nx+n(n-1)\right)e^x$, oricare ar fi $n\in\boldsymbol{N}^*$.

b) Cum $f'(0)+f''(0)+\ldots+f^{(n)}(0)=\sum\limits_{k=1}^{n}f^{(k)}(0)$, iar $f^{(k)}(0)=k(k-1)$, rezultă că $f'(0)+f''(0)+$ $+\ldots+f^{(n)}(0)=\sum\limits_{k=1}^{n}k(k-1)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2-\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n^2-1)}{3}$. Drept urmare,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(0)+f''(0)+\ldots+f^{(n)}(0)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{3n^2}=\frac{1}{3}.$$

c) Având în vedere că $f^{(n+1)}(x)=\left[x^2+2(n+1)x+(n+1)n\right]e^x$, rezultă că $f^{(n+1)}(0)=n(n+1)$. Prin urmare, $f^{(n+1)}(0)=g^{(n)}(0)$. Pentru a putea îndeplini această condiție, putem lua $g(x)=f'(x)$. Deci, $g(x)=(x^2+2x)e^x$.

61. ***Arătați că*** -1 ***este rădăcină multiplă a ecuației*** $x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0$. ***Stabiliți ordinul de multiplicitate al acestei rădăcini şi, apoi, rezolvați ecuația.***

Soluție: Se consideră funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4$. Deoarece $f(-1)=0$, $f'(-1)=0$ (căci $f'(x)=5x^4-4x^3-15x^2+2x+8$), $f''(-1)=0$ (fiindcă $f''(x)=20x^3-12x^2-30x+2$) şi $f'''(-1)\neq 0$ (pentru că $f'''(x)=60x^2-24x-30$), rezultă că -1 este rădăcină triplă a ecuației considerate. Se

arată cu uşurinţă că $f(x)=(x+1)^3(x-2)^2$. Drept urmare rădăcinile ecuaţiei din enunţ sunt $x_1=x_2=x_3=-1$, $x_4=x_5=2$.

62. ***Arătaţi că ecuaţia*** $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^n}{n!}=0$ ***($n\in N^*$) nu are nici o rădăcină multiplă.***

Soluţie: Să considerăm funcţia $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^n}{n!}$. Presupunem, din contra, că ecuaţia din enunţ admite o rădăcină multiplă ; fie aceasta a. Atunci, $f(a)=0$ şi $f'(a)=0$, de unde $1-a+\frac{a^2}{2!}-\frac{a^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{a^n}{n!}=0$ şi $-1+a-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}-...-(-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}=0$. Adunând ultimele două egalităţi membru cu membru, obţinem $(-1)^n\frac{a^n}{n!}=0$, de unde $a=0$. Remarcând că 0 nu este rădăcină a ecuaţiei considerate (căci $f(0)=1$), deducem că presupunerea făcută este falsă. Deci, ecuaţia din enunţ nu are nici o rădăcină multiplă.

63. ***Determinaţi parametrii reali*** a ***şi*** b***, astfel încât ecuaţia*** $x^4-x^3-3x^2+ax+b=0$ ***să aibă o rădăcină triplă număr întreg.***

Soluţie: Să considerăm funcţia $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^4-x^3-3x^2+ax+b$. Remarcăm că $x_0\in\boldsymbol{Z}$ este rădăcină triplă a ecuaţiei considerate dacă $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$ şi $f''(x_0)=0$. Evident, $f'(x)=4x^3-3x^2-6x+a$, iar $f''(x)=12x^2-6x-6$. Rezultă că $f''(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2},\ 1\right\}$. Cum rădăcina triplă trebuie să fie în $\boldsymbol{Z}$, convine numai $x=1$. Remarcând şi faptul că $f(1)=0$ şi $f'(1)=0$, deducem că $a+b-3=0$, respectiv $a-5=0$, de unde $a=5$ şi $b=-2$.

64. ***Determinaţi valoarea parametrului real*** a***, astfel încât ecuaţia*** $x^3+a\,x^2-x-1=0$ ***să aibă o rădăcină dublă.***

Soluţie: Fie funcţia $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^3+a\,x^2-x-1$ şi x_0 rădăcina dublă a ecuaţiei considerate. Atunci, $f(x_0)=0$ şi $f'(x_0)=0$. Dacă $x_0\in\boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R}$, atunci şi $\overline{x_0}$ este rădăcină a ecuaţiei menţionate anterior, ceea ce nu este posibil (căci $\operatorname{grad} f=3$). Deci, $x_0\in\boldsymbol{R}$. Cum $f(x_0)=0$ şi $f'(x_0)=0$, rezultă că $x_0^3+a\,x_0^2-x_0-1=0$, respectiv $3x_0^2+2a\,x_0-1=0$. Eliminându-l pe a din ultimele două egalităţi, deducem că $x_0^3+x_0+2=0$, de unde $(x_0+1)(x_0^2-x_0+2)=0$. Deoarece ecuaţia $x_0^2-x_0+2=0$ nu are rădăcini în $\boldsymbol{R}$, rezultă că $x_0=-1$. Având în vedere că -1 este rădăcină a ecuaţiei din enunţ, deducem că $f(-1)=0$, de unde $a=1$.

65. ***Determinaţi parametrii reali*** a***,*** b ***şi*** c ***, astfel încât ecuaţiile*** $2x^3-3x^2-12x+a=0$ ***şi*** $x^4-x^3+bx^2+cx+8=0$ ***să aibă o rădăcină dublă comună.***

Soluţie: Să considerăm funcţiile f, $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$, $g(x)=x^4-x^3+bx^2+cx+8$. Orice rădăcină dublă a ecuaţiei $f(x)=0$ este şi rădăcină a ecuaţiei $f'(x)=0$. Deoarece $f'(x)=6x^2-6x-12$, rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x\in\{-1,\ 2\}$.

1) Dacă -1 este rădăcina dublă a ecuaţiei $f(x)=0$, atunci $f(-1)=0$, ceea ce conduce la $a+7=0$, de unde $a=-7$. Cum ecuaţiile considerate au o rădăcină dublă comună, rezultă că -1 este rădăcină dublă şi a ecuaţiei $g(x)=0$, de unde $g(-1)=0$ şi $g'(-1)=0$. Drept urmare, $b-c+10=0$ şi $-2b+c-7=0$ (căci $g'(x)=4x^3-3x^2+2bx+c$). Rezultă că $b=3$ şi $c=13$.

2) Dacă 2 este rădăcina dublă a ecuaţiei $f(x)=0$, atunci $f(2)=0$, ceea ce conduce la $a-20=0$, de unde $a=20$. Întrucât 2 este rădăcină dublă şi a ecuaţiei $g(x)=0$ (căci ecuaţiile considerate trebuie să aibă o

rădăcină dublă comună), rezultă că $g(2)=0$ şi $g'(2)=0$. Prin urmare, $4b+2c+16=0$ şi $4b+c+20=0$, de unde $b=-6$ şi $c=4$. Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

Probleme propuse

1. Se consideră funcţiile:

$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2+2x+3$; $\quad g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ g(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+1}$; $\quad h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ h(x)=\sqrt{x^2+8}$;

$u:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ u(x)=\sin 2x+2\cos x$; $\quad v:\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)\to\boldsymbol{R},\ v(x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$.

Folosind definiţia derivatei unei funcţii într-un punct, calculaţi $f'(1)$, $g'(0)$, $h'(-1)$, $u'(0)$ şi $v'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. Se consideră funcţiile:

$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^{x^2+1}$; $\ g:(1,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ g(x)=\ln(x^2-1)$; $\ h:[-1,\ 1]\to\boldsymbol{R},\ h(x)=\arcsin(2x^2-1)$.

Folosind definiţia derivatei unei funcţii într-un punct, calculaţi $f'(-1)$, $g'(2)$ şi $h'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. Pentru fiecare dintre următoarele funcţii, stabiliţi mulţimea pe care respectiva funcţie este derivabilă:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ x^3, & x\ge 0\end{cases}$; $\quad$ **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le -1\\ -3x^2, & x>-1\end{cases}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0\\ x+\sin x, & x>0\end{cases}$; $\quad$ **d)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x<1\\ \ln x, & x\ge 1\end{cases}$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\min\left(x^2-2x,\ 2x-3\right)$ $\quad$ **f)** $f:[0,\ \pi]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\max\left(\cos x,\ \cos^3 x\right)$;

g) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=|x^3-4x|$; $\quad$ h) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x|x^2-2x|$.

4. Pentru fiecare dintre următoarele funcţii, stabiliţi mulţimea pe care respectiva funcţie este derivabilă:

a) $f:[-1,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=|x|+\sqrt{x+1}$; $\quad$ **b)** $f:[1,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x^2+x+1}, & x<0\\ x^2+x+2, & x\ge 0\end{cases}$; $\quad$ **d)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-3x, & x<0\\ x^2e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x<0\\ \ln(x+1), & x\ge 0\end{cases}$; $\quad$ **f)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\le -1\\ \ln(x+2), & x>-1\end{cases}$.

5. Pentru fiecare dintre următoarele funcţii, stabiliţi mulţimea pe care respectiva funcţie este derivabilă:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ x+\ln x, & x>1\end{cases}$; $\quad$ **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}e^x+2x, & x\le 0\\ 3\ln(x+1)+1, & x>0\end{cases}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$; $\quad$ **d)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}$.

6. Arătaţi că funcţia

$$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}-x^2-1, & x<-1\\ 2x, & -1\le x\le 1\\ x^2+1, & x>1\end{cases}$$

este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ şi că derivata ei este o funcţie continuă pe $\boldsymbol{R}$.

7. Arătați că funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2\left[\dfrac{1}{x}\right] & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$ este derivabilă în $x=0$ și că $f'(0)=1$.

8. Fie $a\in\boldsymbol{R}$ și funcțiile derivabile $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$. Arătați că funcția $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ h(x)=\begin{cases}f(x) & ,\ x<a\\ g(x) & ,\ x\geq a\end{cases}$ este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ dacă și numai dacă $f(a)=g(a)$ și $f'(a)=g'(a)$.

9. Fie $m\in\boldsymbol{R}$ și funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+2(m-3)x-2m+6}$. Determinați valorile lui m pentru care funcția f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.

10. Determinați $a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}3x+a & ,\ x<1\\ b & ,\ x=1\\ cx^2+x & ,\ x>1\end{cases}$ să fie derivabilă în $x=1$.

11. Determinați $a,\ b\in\boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f:[-1,\ 1]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+ae^x & ,\ x\in[-1,\ 0]\\ b+\arcsin x & ,\ x\in(0,\ 1]\end{cases}$ să fie derivabilă în $x=0$.

12. Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ și funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3+ax & ,\ x<0\\ b\ln(x+1) & ,\ x\geq 0\end{cases}$. Arătați că f este derivabilă în $x=0$ dacă și numai dacă $a=b$.

13. Determinați $a,\ b\in\boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\ln(2-x^2) & ,\ x\in[0,\ 1]\\ \dfrac{ax^2+b}{x^2} & ,\ x\in(1,\ \infty)\end{cases}$ să fie derivabilă pe $[0,\ \infty)$.

14. Determinați $a,\ b\in\boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}ae^x+1 & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ \sin x+b\cos x & ,\ x\in[0,\ \infty)\end{cases}$ să fie derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.

15. Determinați $a,\ b\in\boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}1+ae^x & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ b\ln(x+1) & ,\ x\in[0,\ \infty)\end{cases}$ să fie derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.

16. Dați un exemplu de funcție $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ care are derivată în orice punct din $\boldsymbol{R}$, dar care să nu fie continuă pe $\boldsymbol{R}$.

17. Fie $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ o funcție pară și derivabilă. Arătați că $f'(0)=0$.

18. Se consideră funcțiile $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ cu proprietatea că $g(x)=(x^2-x+1)f(x)+2x^3$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Arătați că g este derivabilă în $x=1$ dacă și numai dacă f este derivabilă în $x=1$.

19. Se consideră funcțiile $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ cu proprietatea că $g(x)=(x^2+1)f(x)+x$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Calculați $g'(1)$, știind că f este derivabilă în $x=1$ și că $f(1)=1$, iar $f'(1)=2$.

20. Se consideră funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3+1 & ,\ x\in(-\infty,\ 0]\\ x\sin x & ,\ x\in(0,\ \infty)\end{cases}$. Arătați că,deși f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}^*$ și $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$, totuși f nu este derivabilă în $x=0$.

21. Se consideră funcția $f:[-1,\ 1]\to \boldsymbol{R}$ cu proprietatea că $3x-x^2\le f(x)\le 3x+x^2$, oricare ar fi $x\in[-1,\ 1]$. Arătați că f este derivabilă în $x=0$ și că $f'(0)=3$.

22. Se consideră funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ cu proprietatea că $|f(x)-2x|\le x\ \text{arctg}\ x$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Arătați că f este derivabilă în $x=0$ și că $f'(0)=2$.

23. Calculați derivata fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=(x^2-x)\ e^x$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$;

d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=(x^2-x-2)\sin x+(2x-1)\cos x$;

e) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$;

f) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

24. Calculați derivata fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\text{arctg}\ e^x$;

b) $f:(1,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\ln\dfrac{x-1}{2x+1}$;

c) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=2\sin\sqrt{x}-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$;

d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=x\ \text{arctg}\ x-\ln\sqrt{x^2+1}$;

e) $f:(-1,\ 1)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;

f) $f:\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\dfrac{1}{2}\text{tg}^2x+\ln\text{tg}\ x$;

g) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\text{arctg}\left(2x-\sqrt{3}\right)+\text{arctg}\left(2x+\sqrt{3}\right)$;

h) $f:(0,\ 2)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)$.

25. Pentru fiecare dintre următoarele funcții, calculați valoarea derivatei în punctul indicat în dreptul ei:

a) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=x\ln^2x-2x\ln x+2x$ în $x=e$;

b) $f:(-1,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=-\dfrac{1}{x+1}+\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}+\text{arctg}\ x$ în $x=1$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\ln\sqrt{x^2+x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \text{arctg}\ \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ în $x=2$;

d) $f:(0,\ \pi)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ \text{arctg}\ \dfrac{\text{tg}\ \dfrac{x}{2}}{\sqrt{3}}$ în $x=\dfrac{\pi}{2}$;

e) $f:(-1,\ 1)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\left(\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{1}{8}x\right)\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{8}\arcsin x$ în $x=0$.

26. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xe^{x^2}-e}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{6}}{x-2}$.

27. Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ și funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=(x^2+ax+b)\ e^x$. Determinați a și b, astfel încât $f'(x)=(x^2-1)\ e^x$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

28. Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ și funcția $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=x^2(a\ln x+b)$. Determinați a și b, astfel încât $f'(x)=x\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$.

29. Fie $a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$ și funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+c\ \text{arctg}\ x$. Determinați a, b și c, astfel încât $f'(x)=\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

30. Fie $a,\ b,\ c,\ d,\ e\in\boldsymbol{R}$ și funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=(ax^2+bx+c)\sin x+(dx+e)\cos x$. Determinați a, b, c, d și e, astfel încât $f'(x)=x^2\cos x$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

31. Fie $a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R}$ şi funcţia $f:(-2,\ 2) \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = (ax+b)\sqrt{4-x^2} + c \arcsin \dfrac{x}{2}$. Determinaţi a, b şi c, astfel încât $f'(x) = \sqrt{4-x^2}$, oricare ar fi $x \in (-2,\ 2)$.

32. Se consideră funcţia $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = x^3 + x + 1$.

a) Arătaţi că f este inversabilă.

b) Fie $g = f^{-1}$. Calculaţi $g'(-1)$.

33. Se consideră funcţia $f:[e,\ \infty) \to [e,\ \infty),\quad f(x) = x \ln x$.

a) Arătaţi că f este inversabilă.

b) Fie $g = f^{-1}$. Calculaţi $g'(n\,e^n)$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$.

34. Pentru fiecare dintre următoarele funcţii, scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul indicat în dreptul ei:

a) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = x^2 - 3x + 3$ în $A\big(1,\ f(1)\big)$;

b) $f: \boldsymbol{R} \setminus \{1\} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ în $A\big(2,\ f(2)\big)$;

c) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ în $A\big(0,\ f(0)\big)$;

d) $f:(-\infty,\ 0] \cup [2,\ \infty) \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ în $A\big(-1,\ f(-1)\big)$;

e) $f:(-2,\ 2) \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = \ln(4-x^2)$ în $A\big(1,\ f(1)\big)$;

f) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = 1 - 4 \operatorname{arctg} x$ în $A\big(-1,\ f(-1)\big)$;

g) $f:[-1,\ 1] \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = x - 2\arccos x$ în $A\big(0,\ f(0)\big)$.

35. Se consideră funcţia $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$. Arătaţi că orice tangentă la G_f face cu axa Ox un unghi ascuţit.

36. Se consideră funcţia $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ şi dreapta h având ecuaţia $2x - 6y + 1 = 0$. Aflaţi ecuaţia tangentei la G_f care este perpendiculară pe dreapta h.

37. Fie $a \in \boldsymbol{R}$, funcţia $f: \boldsymbol{R} \setminus \{1\} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = \dfrac{x^2-2}{x-1}$ şi dreapta h având ecuaţia $y = 2x + a$. Determinaţi valorile lui a, astfel încât dreapta h să fie tangentă la G_f.

38. Fie $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ şi funcţiile $f,\ g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = x^2 + ax + b,\quad g(x) = \dfrac{2(x+1)}{x^2+1}$. Determinaţi a şi b, astfel încât G_f şi G_g să fie tangente în punctul $A(1,\ 2)$.

39. Se consideră funcţia $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = (x+2)\ e^x$. Determinaţi numărul tangentelor la G_f care conţin punctul $O(0,\ 0)$.

40. Se consideră funcţiile $f,\ g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = e^x,\quad g(x) = e^x \sin x$. Determinaţi punctele comune celor două grafice şi, apoi, arătaţi că în fiecare dintre aceste puncte cele două grafice au aceeaşi tangentă.

41. Se consideră funcţiile $f,\ g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = x^3 - x^2 - x - 1,\quad g(x) = x^2 - 2x + 1$. Arătaţi că graficele acestor funcţii au un punct comun şi, apoi, aflaţi măsura unghiului format de tangentele la G_f, respectiv G_g în punctul comun.

42. Determinaţi punctele unghiulare ale graficului fiecăreia dintre următoarele funcţii:

a) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = x^2\,|\,x-1\,|$;

b) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = |\,x^2 + x - 2\,|$;

c) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = |\,x\,|\,e^{-|\,x-1\,|}$;

d) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\quad f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{x^2+1}$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2 & ,\ x<2\\ x^3-2x & ,\ x\geq 2\end{cases}$; **f)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-2} & ,\ x\leq 0\\ x\ln x & ,\ x>0\end{cases}$;

g) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & ,\ x<1\\ \ln x & ,\ x\geq 1\end{cases}$.

43. Determinați punctele de întoarcere ale graficului fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x\sqrt{|x-1|}$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$;

c) $f:\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{\sqrt{|x^2-4|}}{x}$; **d)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & ,\ x<0\\ \sqrt[3]{x} & ,\ x\geq 0\end{cases}$.

44. Fie $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ o funcție polinomială cu proprietatea că $\big(f''(x)\big)^5=\big(f(x)\big)^3$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Determinați $\operatorname{grad} f$.

45. Fie funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^{6x}-36x^3-18x^2-6x-1$. Arătați că $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)$.

46. Fie funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=(x+1)e^{2x}+x^2+2x$. Arătați că $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=4x^2-6$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

47. Se consideră funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^x\sin x$. Arătați că $f''(x)-2f'(x)+2f(x)=0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

48. Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ și funcția $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=a\cos(\ln x)+b\sin(\ln x)$. Arătați că
$x^2f''(x)+xf'(x)+f(x)=0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$.

49. Se consideră funcția $f:(-1,\ 1)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^{\arcsin x}$. Arătați că $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)-f(x)=0$, oricare ar fi $x\in(-1,\ 1)$.

50. Se consideră funcția $f:(-1,\ 1)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{\sin(2\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Arătați că
$(x^2-1)f''(x)+3xf'(x)-3f(x)=0$, oricare ar fi $x\in(-1,\ 1)$.

51. Se consideră funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^{-x}\cos x$. Arătați că $f^{(4)}(x)+4f(x)=0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

52. Se consideră funcția indefinit derivabilă $f:[a,\ b]\to(0,\ \infty)$ cu proprietatea că $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in[a,\ b]$. Fie $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt{f'(x)}}$ și $v(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$. Arătați că $\dfrac{u''(x)}{u(x)}=\dfrac{v''(x)}{v(x)}$.

53. Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ și funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^{-x}\sin 2x$. Determinați a și b astfel încât $f''(x)+af'(x)+bf(x)=0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

54. Fie $a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$ și funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & ,\ x<0\\ 2\sin 3x+3\cos 2x & ,\ x\geq 0\end{cases}$. Determinați a, b și c, astfel încât f să fie de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.

55. Fie $a,\ b\in(0,\ \infty)$ și funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{3x-1} & ,\ x\leq 0\\ x+\ln(ax+b) & ,\ x>0\end{cases}$. Determinați a și b astfel încât f să fie derivabilă pe $\boldsymbol{R}$. Este funcția astfel obținută de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$?

56. Determinați funcția polinomială $P:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ având cel mai mic grad posibil, astfel încât funcția

$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\begin{cases}(x-1)e^{x-1} & ,\ x\le 1\\ P(x) & ,\ x>1\end{cases}$ să fie de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.

57. Determinați derivata de ordinul n pentru fiecare dintre următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{2\}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\dfrac{1}{x-2}$;

b) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$;

d) $f:\left(-\dfrac{1}{2},\ \infty\right)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\ln(2x+1)$;

e) $f:(-2,\ 2)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\ln(4-x^2)$;

f) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=2^x+3^{-x}$.

58. Calculați derivata de ordinul n a funcției $f:\left(\dfrac{1}{2},\ \infty\right)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\ln(2x^2+3x-2)$.

59. Calculați derivata de ordinul n a funcției $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x^3+x^2-x-1}$.

60. **a)** Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ şi funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\cos(ax+b)$. Arătați că $f^{(n)}(x)=a^n\cos\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ ($n\in\boldsymbol{N}^*$), oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

b) Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ şi funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\sin(ax+b)$. Arătați că $f^{(n)}(x)=a^n\sin\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ ($n\in\boldsymbol{N}^*$), oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

61. Se consideră funcția $f:\boldsymbol{R}\setminus\{3\}\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\dfrac{3x-8}{x-3}$ şi şirul $(a_n)_{n\ge 1}$, unde $a_n=\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

62. Se consideră funcția $f:(-\infty,\ 2)\to\boldsymbol{R},\quad f(x)=\ln(2-x)$ şi suma $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k-1)!}f^{(k)}(1)$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}$.

63. Aflați rădăcinile ecuației $x^4-x^3-3x^2+5x-2=0$, ştiind că aceasta are o rădăcină triplă.

64. Determinați $a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$, astfel încât $x=1$ să fie rădăcină triplă a ecuației $x^5-x^4+ax^2+bx+c=0$.

65. Fie a un parametru real şi ecuațiile $x^3-2x^2+x+a-1=0,\quad x^3-3x+a^2+2a-1=0$. Determinați a, astfel încât cele două ecuații să aibă o rădăcină dublă comună.

66. Determinați $a,\ b\in\boldsymbol{R}$, astfel încât ecuația $x^4-4x^3+ax+b=0$ să aibă o rădăcină triplă număr întreg nenul.

67. Determinați valorile parametrului real a, pentru care ecuația $2x^3+x^2+ax-3=0$ are o rădăcină dublă.

68. Determinați valorile parametrilor reali $a,\ b$ şi c, astfel încât ecuațiile $x^3+ax^2-3x+2=0,\quad x^4-2x^3+2x^2+bx+c=0$ să aibă o rădăcină dublă comună număr rațional.

Răspunsuri

1. $f'(1)=4,\ g'(0)=3,\ h'(-1)=-\frac{1}{3},\ u'(0)=2,\ v'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ **2.** $f'(-1)=-2e^2,\ g'(2)=\frac{4}{3},\ h'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}$

3. a) $\boldsymbol{R}$; **b)** $\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$; **c)** $\boldsymbol{R}$; **d)** $\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$; **e)** $\boldsymbol{R}\setminus\{1,\ 3\}$; **f)** $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$; **g)** $\boldsymbol{R}\setminus\{-2,\ 0,\ 2\}$;

h) $\boldsymbol{R}\setminus\{2\}$ **4. a)** $(-1,\ 0)\cup(0,\ \infty)$; **b)** $(1,\ 5)\cup(5,\ \infty)$; **c)** $\boldsymbol{R}$; **d)** $\boldsymbol{R}^*$; **e)** $\boldsymbol{R}$; **f)** $\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$ **5. a)** $\boldsymbol{R}$; **b)** $\boldsymbol{R}$; **c)** $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}$; **d)** $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}$ **9.** $m\in(1,\ 3)$ **10.** $a=-1,\ b=2,\ c=1$ **11.** $a=b=-1$

13. $a=-1,\ b=1$ **14.** $a=1,\ b=2$ **15.** $a=b=-1$ **19.** $g'(1)=7$ **23. a)** $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; **b)** $(x^2+x-1)\,e^x$;

c) $2e^x\sin x$; **d)** $(x^2-x)\cos x$; **e)** $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; **f)** $\frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$ **24. a)** $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$; **b)** $\frac{3}{2x^2-x-1}$; **c)** $\sin\sqrt{x}$;

d) $\operatorname{arctg} x$; **e)** $\arcsin x$; **f)** $\frac{1}{\sin x\cos^3 x}$; **g)** $\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}$; **h)** $2\sqrt{2x-x^2}$ **25. a)** 1; **b)** $\frac{3}{4}$; **c)** $\frac{3}{7}$;

d) $\frac{1}{2}$; **e)** 0 **26. a)** $\frac{4}{3}$; **b)** $3e$; **c)** $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ **27.** $a=-2,\ b=1$ **28.** $a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{4}$

29. $a=-\frac{1}{2},\ b=0,\ c=\frac{1}{2}$ **30.** $a=1,\ b=0,\ c=-2,\ d=2,\ e=0$ **31.** $a=\frac{1}{2},\ b=0,\ c=2$ **32. b)** $\frac{1}{4}$

33. b) $\frac{1}{n+1}$ **34. a)** $x+y-2=0$; **b)** $x+y-7=0$; **c)** $2x-y-1=0$; **d)** $2x+y\sqrt{3}-1=0$;

e) $2x+3y-2-3\ln 3=0$; **f)** $2x+y+1-\pi=0$; **g)** $3x-y-\pi=0$ **36.** $3x+y+2=0$ **37.** $a=-2$ sau $a=2$

38. $a=-3,\ b=4$ **39.** 2 **40.** $A_k\left(x_k,\ e^{x_k}\right)$, unde $x_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ şi $k\in\boldsymbol{Z}$ **41.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ **42. a)** $A(1,\ 0)$;

b) $A(-2,\ 0)$ şi $B(1,\ 0)$; **c)** $O(0,\ 0)$ şi $A(1,\ 1)$; **d)** $A\left(-1,\ -\frac{\pi}{2}\right)$ şi $B\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$; **e)** $A(2,\ 4)$; **f)** $O(0,\ 0)$;

g) $A(1,\ 0)$ **43. a)** $A(1,\ 0)$; **b)** $O(0,\ 0)$; **c)** $A(-2,\ 0)$ şi $B(2,\ 0)$; **d)** $O(0,\ 0)$ **44.** 5

53. $a=2,\ b=5$ **54.** $a=-6,\ b=6,\ c=3$ **55.** $a=b=e$; nu **56.** $P(x)=x^2-x$ **57. a)** $\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$;

b) $\frac{3(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$; **c)** $(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$; **d)** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!2^n}{(2x+1)^n}$; **e)** $(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{(x-2)^n}+\frac{1}{(x+2)^n}\right)$;

f) $2^x\ln^n 2+(-1)^n 3^{-x}\ln^n 3$ **58.** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!2^n}{(2x-1)^n}+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n}$ **59.** $\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$

61. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ **62.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=-\frac{1}{2}$ **63.** $x_1=x_2=x_3=1,\ x_4=-2$ **64.** $a=-4,\ b=7,\ c=-3$

65. $a=1$ **66.** $a=16,\ b=-16$ **67.** $a=-4$ **68.** $a=0,\ b=-2,\ c=1$

CAPITOLUL X

STUDIUL FUNCȚIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR

Probleme rezolvate

1. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^3-3x$. ***Arătați că*** $x=-1$ ***este punct de maxim local al funcției*** f, ***iar*** $x=1$ ***este punct de minim local al funcției*** f.

Soluție: Evident, $x=-1$ este punct de maxim local al funcției f dacă şi numai dacă există o vecinătate V a lui -1 astfel încât $f(x)\le f(-1)$, oricare ar fi $x\in V$. Remarcând că $f(x)\le f(-1)\Leftrightarrow x^3-3x\le 2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^3-3x-2\le 0\Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)\le 0\Leftrightarrow x\le 2$, putem considera $V=(-2,\ 0)$. Deci, $f(x)\le f(-1)$, oricare ar fi $x\in V$, ceea ce arată că $x=-1$ este punct de maxim local al funcției f. Totodată, $x=1$ este punct de minim local al lui f dacă şi numai dacă există o vecinătate V' a lui 1 astfel încât $f(x)\ge f(1)$, oricare ar fi $x\in V'$. Evidențiind faptul că $f(x)\ge f(1)\Leftrightarrow x^3-3x\ge -2\Leftrightarrow x^3-3x+2\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)\ge 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\ge -2$, putem considera $V'=(0,\ 2)$. Drept urmare, $f(x)\ge f(1)$, oricare ar fi $x\in V'$, ceea ce arată că $x=1$ este punct de minim local al lui f.

2. ***Fie funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=|x^2-1|$. ***Arătați că atât*** $x=-1$, ***cât şi*** $x=1$ ***sunt puncte de extrem local ale lui*** f, ***deşi*** f ***nu este derivabilă nici în*** $x=-1$ ***şi nici în*** $x=1$.

Soluție: Fie $V=(-2,\ 0)$ o vecinătate a lui -1 şi $V'=(0,\ 2)$ o vecinătate a lui 1. Deoarece $f(x)\ge f(-1)$, oricare ar fi $x\in V$ (căci $f(x)\ge 0$ şi $f(-1)=0$) rezultă că $x=-1$ este punct de minim local al lui f. Remarcând că $f(x)\ge f(1)$, oricare ar fi $x\in V'$, deducem că $x=1$ este punct de minim local al lui f. Se stabileşte cu uşurință că f este derivabilă doar pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}$ şi că $f'(x)=\begin{cases}2x, & x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)\\ -2x, & x\in(-1,\ 1)\end{cases}$.

3. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^4-x^3$. ***Arătați că, deşi*** $f'(0)=0$, ***totuşi*** $x=0$ ***nu este punct de extrem local al lui*** f.

Soluție: Deoarece $f'(x)=4x^3-3x^2$, rezultă că $f'(0)=0$. Fie $V=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ o vecinătate a lui $x=0$. Dacă $x\in\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, atunci $x^4-x^3>0$ (căci $x^4>0$ şi $x^3<0$), deci $f(x)>f(0)$. Dacă $x\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, atunci $x^4<x^3$, ceea ce implică $f(x)<f(0)$. Rezultă că $x=0$ nu este punct de extrem local al lui f.

Observație: Din cele stabilite în problemă, deducem că nu orice rădăcină a derivatei unei funcții este punct de extrem al respectivei funcții.

4. ***Se consideră funcția*** $f:[1,\ e]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\ln x$. ***Arătați că*** $x=1$ ***este punct de minim local al funcției*** f, ***iar*** $x=e$ ***este punct de maxim local al lui*** f, ***cu toate că*** $f'(x)\ne 0$, ***oricare ar fi*** $x\in[1,\ e]$.

Soluție: Întrucât $f(1)=0$ şi $f(x)\ge 0$, oricare ar fi $x\in[1,\ e]$, rezultă că $x=1$ este punct de minim local al funcției f. Remarcând că $f(e)=1$ şi $f(x)\le 1$, oricare ar fi $x\in[1,\ e]$, deducem că $x=e$ este punct de maxim local al lui f. Întrucât $f'(x)=\frac{1}{x}$, rezultă că $f'(x)\ne 0$, oricare ar fi $x\in[1,\ e]$.

Observație: Teorema lui Fermat nu poate fi aplicată în cazul problemei considerate, deoarece punctele 1 şi e nu sunt situate în interiorul intervalului $[1,\ e]$.

5. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^2-3x+4$. ***Arătați că, pentru orice*** $\lambda>0$, ***există un interval de lungime*** λ ***pe care putem aplica funcției*** f ***teorema lui Rolle.***

Soluție: Fie $a\in\boldsymbol{R}$ şi intervalul $I=[a,\ a+\lambda]$. Evident, f este continuă şi derivabilă pe I. Pentru a putea aplica funcției f teorema lui Rolle, mai este necesar ca $f(a)=f(a+\lambda)$. Cum $f(a)=a^2-3a+4$, iar $f(a+\lambda)=a^2+2a\lambda+\lambda^2-3a-3\lambda+4$, egalitatea anterioară conduce la $2a+\lambda-3=0$ (căci $\lambda\neq 0$), de unde $a=\dfrac{3-\lambda}{2}$. Drept urmare, intervalul căutat este $\left[\dfrac{3-\lambda}{2},\ \dfrac{3+\lambda}{2}\right]$.

6. ***Arătați că fiecare dintre funcțiile:*** $f:[1,\ 3]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^2-4x+2$; $g:[-1,\ 4]\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=\sqrt{4+3x-x^2}$; $h:\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ 2\right]\to\boldsymbol{R}$, $h(x)=\begin{cases}2x^2-2x+3, & x\in\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ 1\right)\\ 2x+1, & x\in[1,\ 2]\end{cases}$; $u:[-1,\ \pi]\to\boldsymbol{R}$, $u(x)=\begin{cases}x^2+x+2, & x\in[-1,\ 0]\\ 2+\sin x, & x\in(0,\ \pi]\end{cases}$ ***îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle.***

Soluție: Deoarece f este restricția unei funcții polinomiale, ea este continuă şi derivabilă pe $[1,\ 3]$. Având în vedere şi faptul că $f(1)=f(3)$ (căci $f(1)=-1$ şi $f(3)=-1$), deducem că f îndeplineşte condițiile teoremei lui Rolle.

Remarcăm, mai întâi, că funcția g este continuă pe $[-1,\ 4]$ (fiind compusa a două funcții continue). Întrucât $4+3x-x^2>0$, oricare ar fi $x\in(-1,\ 4)$, rezultă că g este derivabilă pe $(-1,\ 4)$. Ținând seama şi de faptul că $g(-1)=g(4)$, conchidem că g îndeplineşte condițiile teoremei lui Rolle.

Dacă $x\in\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ 1\right)$, atunci $h(x)=2x^2-2x+3$, care este o funcție continuă şi derivabilă (fiind restricția unei funcții polinomiale). Dacă $x\in(1,\ 2]$, atunci $h(x)=2x+1$, care este o funcție continuă şi derivabilă. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(2x^2-2x+3)=3$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} h(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(2x+1)=3$ şi $h(1)=3$, rezultă că funcția h este continuă în $x=1$. Remarcând că $h'_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{2x^2-2x}{x-1}=2\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}x=2$ şi $h'_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{2x-2}{x-1}=2$, deducem că h este derivabilă în $x=1$. Drept urmare, funcția h este continuă şi derivabilă pe $\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ 2\right]$. Evidențiind şi faptul că $h\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=h(2)$, conchidem că funcția h îndeplineşte condițiile teoremei lui Rolle.

Dacă $x\in[-1,\ 0)$, atunci $u(x)=x^2+x+2$, care este o funcție continuă şi derivabilă. Dacă $x\in(0,\ \pi]$, atunci $u(x)=\sin x+2$, care este o funcție continuă şi derivabilă. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} u(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x^2+x+2)=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(2+\sin x)=2$ şi $u(0)=2$, rezultă că funcția u este continuă în $x=0$. Remarcând că $u'_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{u(x)-u(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{x^2+x}{x}=1$ şi $u'_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{u(x)-u(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sin x}{x}=1$, deducem că funcția u

este derivabilă în $x=0$. Prin urmare, funcția u este continuă şi derivabilă pe $[-1,\ \pi]$. Evidențiem şi faptul că $u(-1)=u(\pi)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, funcția u îndeplineşte condițiile teoremei lui Rolle.

7. ***Se consideră funcția*** $f:[-1,\ 1]\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases} 1-2x & , \ x\in[-1,\ 0] \\ 3x^2-x+1 & , \ x\in(0,\ 1] \end{cases}$. ***Arătați că, deşi,*** f ***nu îndeplineşte toate condițiile teoremei lui Rolle, totuşi există*** $c\in(-1,\ 1)$ ***astfel încât*** $f'(c)=0$.

Soluție: Întrucât $f'_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1-2x-1}{x}=-2$, iar $f'_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{3x^2-x}{x}=-1$, rezultă că f nu este derivabilă în $x=0$. Deci, f nu este derivabilă pe $(-1,\ 1)$, ceea ce arată că funcția f nu îndeplineşte toate condițiile teoremei lui Rolle. Pe de altă parte, dacă $x\in(0,\ 1)$, atunci $f'(x)=6x-1$, ceea ce implică $f'\left(\dfrac{1}{6}\right)=0$. Remarcăm şi faptul că $\dfrac{1}{6}\in(0,\ 1)$.

Observație: Cele stabilite în problemă nu contrazic teorema lui Rolle, deoarece condițiile din teoremă sunt suficiente nu şi necesare.

8. ***Determinați*** $a,\ b,\ c\in \boldsymbol{R}$***, astfel încât funcția*** $f:[-1,\ 1]\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases} ax^2-3x+1 & , \ x\in[-1,\ 0] \\ 4x^2+bx+c & , \ x\in(0,\ 1] \end{cases}$ ***să îndeplinească condițiile teoremei lui Rolle.***

Soluție: Funcția f îndeplineşte condițiile teoremei lui Rolle dacă este continuă pe $[-1,\ 1]$, este derivabilă pe $(-1,\ 1)$ şi $f(-1)=f(1)$. Se arată cu uşurință că f este continuă şi derivabilă pe $[-1,\ 0)\cup(0,\ 1]$. Pentru a îndeplini cerințele anterioare, este necesar ca f să fie continuă şi derivabilă în $x=0$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(ax^2-3x+1)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(4x^2+bx+c)=c$ şi $f(0)=1$, funcția f este continuă în $x=1$ dacă $c=1$. Având în vedere că $f'_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{ax^2-3x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(ax-3)=-3$, iar $f'_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{4x^2+bx}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(4x+b)=b$, funcția f este derivabilă în $x=0$ dacă $b=-3$. Impunând condiția $f(-1)=f(1)$, deducem că $a=b+c$, de unde $a=-2$. Deci $a=-2$, $b=-3$ şi $c=1$.

9. ***Fie*** $f:[a,\ b]\to \boldsymbol{R}$ ***o funcție continuă pe*** $[a,\ b]$ ***şi derivabilă pe*** $(a,\ b)$. ***Arătați că, dacă*** $f^2(a)-f^2(b)=a^2-b^2$, ***atunci există*** $c\in(a,\ b)$ ***astfel încât*** $f(c)f'(c)=c$.

Soluție: Evident, prima dintre egalitățile din enunț poate fi scrisă sub forma $f^2(a)-a^2=f^2(b)-b^2$. Această egalitate ne sugerează să considerăm funcția auxiliară $g:[a,\ b]\to \boldsymbol{R}$, $g(x)=f^2(x)-x^2$. Se arată cu uşurință că funcția g este continuă pe $[a,\ b]$ şi derivabilă pe $(a,\ b)$. Totodată, $g(a)=g(b)$. Drept urmare, există $c\in(a,\ b)$ astfel încât $g'(c)=0$. Cum $g'(x)=2f(x)f'(x)-2x$, rezultă că $2f(c)f'(c)-2c=0$, de unde $f(c)f'(c)=c$.

10. ***Fie*** $f:[0,\ 1]\to \boldsymbol{R}$ ***o funcție continuă pe*** $[0,\ 1]$ ***şi derivabilă pe*** $(0,\ 1)$. ***Arătați că, dacă*** $ef(0)=f(1)$***, atunci există*** $c\in(0,\ 1)$ ***astfel încât*** $f'(c)=f(c)$.

Soluție: Egalitatea $ef(0)=f(1)$ ne sugerează să considerăm funcția auxiliară $g:[0,\ 1]\to \boldsymbol{R}$, $g(x)=e^{1-x}f(x)$. Se arată cu uşurință că funcția g este continuă pe $[0,\ 1]$ şi că este derivabilă pe $(0,\ 1)$. Întrucât $g(0)=ef(0)$ şi $g(1)=f(1)$, iar $ef(0)=f(1)$, rezultă că $g(0)=g(1)$. Prin urmare, există

$c \in (0,\ 1)$ astfel încât $g'(c) = 0$. Cum $g'(x) = -e^{1-x} f(x) + e^{1-x} f'(x) = e^{1-x}\left(f'(x) - f(x)\right)$, rezultă că $e^{1-c}\left(f'(c) - f(c)\right) = 0$, de unde $f'(c) = f(c)$ (căci $e^{1-c} \neq 0$).

11. ***Fie*** $f,\ g,\ h : [a,\ b] \to \boldsymbol{R}$ ***trei funcții derivabile pe*** $[a,\ b]$***. Arătați că, dacă*** $f(a) = g(b) = 0$***, iar*** $f(x)g(x)h(x) \neq 0$***, oricare ar fi*** $x \in (a,\ b)$***, atunci există*** $c \in (a,\ b)$ ***astfel încât*** $\dfrac{f'(c)}{f(c)} + \dfrac{g'(c)}{g(c)} + \dfrac{h'(c)}{h(c)} = 0$**.**

Soluție: Să considerăm funcția auxiliară $u : [a,\ b] \to \boldsymbol{R}$, $u(x) = f(x)g(x)h(x)$. Întrucât funcțiile *f, g* și *h* sunt derivabile pe $[a,\ b]$, rezultă că funcția u este derivabilă pe $[a,\ b]$. Remarcând că $f(a) = g(b) = 0$, deducem că $u(a) = u(b)$. Prin urmare, există $c \in (a,\ b)$ astfel încât $u'(c) = 0$. Cum $u'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$, rezultă că $f'(c)g(c)h(c) + f(c)g'(c)h(c) + f(c)g(c)h'(c) = 0$. Împărțind ambii membri ai acestei egalități prin $f(c)g(c)h(c)$ (ceea ce este posibil, căci $f(x) \neq 0,\ g(x) \neq 0$ și $h(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in (a,\ b)$), obținem egalitatea pe care trebuia să o demonstrăm.

12. ***Se consideră funcțiile*** $f,\ g : [a,\ b] \to \boldsymbol{R}$ ***continue pe*** $[a,\ b]$ ***și derivabile pe*** $(a,\ b)$***. Arătați că, dacă*** $f(a) = f(b) = 0$***, iar*** $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$***, oricare ar fi*** $x \in (a,\ b)$***, atunci există*** $c \in [a,\ b]$ ***astfel încât*** $g(c) = 0$**.**

Soluție: Să presupunem, din contra, că $g(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in [a,\ b]$. Condiția $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$ ne sugerează să considerăm funcția auxiliară $h : [a,\ b] \to \boldsymbol{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Deoarece h este continuă pe $[a,\ b]$ (căci f și g sunt continue pe $[a,\ b]$), h este derivabilă pe $(a,\ b)$ (fiindcă f și g sunt derivabile pe $(a,\ b)$), iar $h(a) = h(b)$ (căci $f(a) = f(b) = 0$ implică $h(a) = 0$ și $h(b) = 0$), rezultă că există $x_0 \in (a,\ b)$ astfel încât $h'(x_0) = 0$. Remarcând și faptul că $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, deducem că $f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) = 0$, ceea ce contrazice enunțul. Deci, presupunerea făcută este falsă și, deci, există $c \in [a,\ b]$ astfel încât $g(c) = 0$.

13. ***Fie*** $f : [a,\ b] \to \boldsymbol{R}^*$ ***o funcție derivabilă pe*** $[a,\ b]$***. Folosind funcția auxiliară*** $g : [a,\ b] \to \boldsymbol{R}$**,** $g(x) = e^{-x}(x-a)(x-b)f(x)$***, arătați că există*** $c \in (a,\ b)$ ***astfel încât*** $\dfrac{f'(c)}{f(c)} = 1 + \dfrac{1}{a-c} + \dfrac{1}{b-c}$**.**

Soluție: Deoarece f este derivabilă pe $[a,\ b]$, rezultă că și g este derivabilă pe $[a,\ b]$. Remarcând și faptul că $g(a) = g(b)$, deducem că există $c \in (a,\ b)$ astfel încât $g'(c) = 0$. Cum $g'(x) = \left[-e^{-x}(x-a)(x-b) + e^{-x}(2x-a-b)\right] f(x) + e^{-x}(x-a)(x-b)f'(x)$, rezultă că $e^{-c}\left[-(c-a)(c-b)f(c) + (2c-a-b)f(c) + (c-a)(c-b)f'(c)\right] = 0$, ceea ce conduce la $(c-a)(c-b)\left(f(c) - f'(c)\right) = (2c-a-b)f(c)$. Evidențiind faptul că $(c-a)(c-b) \neq 0$ și $f(c) \neq 0$, deducem că $\dfrac{f(c) - f'(c)}{f(c)} = \dfrac{2c-a-b}{(c-a)(c-b)}$, de unde $1 - \dfrac{f'(c)}{f(c)} = \dfrac{1}{c-b} + \dfrac{1}{c-a}$, ceea ce este totuna cu egalitatea pe care trebuia să o demonstrăm.

14. ***Fie*** $f : [a,\ b] \to \boldsymbol{R}$ ***o funcție de două ori derivabilă pe*** $[a,\ b]$***. Arătați că, dacă*** G_f ***conține trei puncte coliniare, atunci există*** $c \in (a,\ b)$ ***astfel încât*** $f''(c) = 0$**.**

Soluție: Fie $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $C(x_3, f(x_3))$ ($x_1,\ x_2,\ x_3 \in [a,\ b]$, $x_1 < x_2 < x_3$) cele trei puncte coliniare ale lui G_f, iar h dreapta care le conține și $y = mx + n$ ecuația ei. Cum $A \in G_f$ și $A \in h$, rezultă că $f(x_1) = mx_1 + n$. Analog, $f(x_2) = mx_2 + n$ și $f(x_3) = mx_3 + n$. Să considerăm funcția auxiliară $g : [a,\ b] \to \boldsymbol{R}$, $g(x) = f(x) - (mx + n)$. Remarcăm faptul că $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 0$. Deoarece g este derivabilă pe $[x_1,\ x_2]$ și $g(x_1) = g(x_2)$, rezultă că există $c_1 \in (x_1,\ x_2)$ astfel încât $g'(c_1) = 0$. Analog, arătăm că există $c_2 \in (x_2,\ x_3)$ astfel încât $g'(c_2) = 0$ (evident, $c_2 > c_1$). Având în vedere că g este de două ori derivabilă pe $[a,\ b]$ (căci f este de două ori derivabilă pe $[a,\ b]$), iar $[c_1,\ c_2] \subset [a,\ b]$, deducem că g este de două ori derivabilă pe $[c_1,\ c_2]$, ceea ce este totuna cu faptul că g' este derivabilă pe $[c_1,\ c_2]$. Ținând seama și de faptul că $g'(c_1) = g'(c_2)$, conchidem că există $c \in (c_1,\ c_2)$ astfel încât $g''(c) = 0$. Cum $f''(x) = g''(x)$, oricare ar fi $x \in [a,\ b]$, iar $(c_1,\ c_2) \subset (a,\ b)$, rezultă că există $c \in (a,\ b)$ astfel încât $f''(c) = 0$.

15. ***Fie $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ o funcție polinomială. Arătați că, dacă toate rădăcinile lui f sunt reale și distincte, atunci și funcția f' are aceeași proprietate.***

Soluție: Fie $n = \operatorname{grad} f$ și $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ rădăcinile lui f. Cum f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, iar $f(x_k) = f(x_{k+1})$ (pentru fiecare $k = \overline{1, n-1}$), conform teoremei lui Rolle, există $c_k \in (x_k,\ x_{k+1})$ astfel încât $f'(c_k) = 0$. Având în vedere că sunt $n-1$ numere c_k, deducem că funcția f' are $n-1$ rădăcini reale și distincte (căci $x_k < c_k < x_{k+1}$, oricare ar fi $k = \overline{1, n-1}$). Remarcând și faptul că $\operatorname{grad} f' = n - 1$, conchidem că f' are toate rădăcinile reale și distincte.

16. ***Fie $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ și funcția polinomială $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b$. Arătați că f are cel mult două rădăcini reale.***

Soluție: Presupunem, din contra, că f are mai mult de două rădăcini reale. Deoarece f are coeficienții în $\boldsymbol{R}$ și $\operatorname{grad} f = 4$, rezultă că f are patru rădăcini reale. Atunci, f' are trei rădăcini reale, iar f'' are două rădăcini reale. Pe de altă parte, $f''(x) = 6(2x^2 + 2x + 1)$, ceea ce arată că rădăcinile ecuației $f''(x) = 0$ sunt în $\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{R}$ (căci $\Delta = -4 < 0$). Contradicția la care s-a ajuns arată că presupunerea făcută este falsă. Deci, f are cel mult două rădăcini reale.

17. ***Arătați că ecuația***

$$(x-1)(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2)(x-4) + (x-1)(x-3)(x-4) + (x-2)(x-3)(x-4) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

are toate rădăcinile reale și distincte.

Soluție: Se observă cu ușurință că membrul întâi al ecuației (1) este derivata funcției polinomiale $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Remarcând și faptul că toate rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ sunt reale și distincte, deducem că și toate rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ sunt reale și distincte. Deci, ecuația (1) are toate rădăcinile reale și distincte.

18. ***Fie $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ o funcție derivabilă și $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \boldsymbol{R}$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ n zerouri ale lui f (rădăcini ale ecuației $f(x) = 0$). Arătați că f' are cel puțin $n-1$ zerouri. Folosind acest rezultat, deduceți că funcția polinomială de grad n are cel mult n zerouri distincte.***

Soluție: Pentru rezolvarea problemei, folosim propoziția: „între două zerouri consecutive ale unei funcții derivabile există cel puțin un zerou al derivatei". Drept urmare, în fiecare dintre intervalele $(x_k,\ x_{k+1})$ ($k = \overline{1, n-1}$), f' are cel puțin un zerou. Fiind $n-1$ asemenea intervale, f' are cel puțin $n-1$ zerouri distincte. Fie $P : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ o funcție polinomială de grad n ($n \in \boldsymbol{N}^*$). Presupunem, din contra, că P are cel puțin $n+1$ zerouri distincte. Cum funcția P este indefinit derivabilă, rezultă că:

P' are cel puțin $(n+1) - 1 = n$ zerouri distincte;

P'' are cel puțin $n-1$ zerouri distincte;

……

$P^{(n)}$ are cel puțin un zerou.

Având în vedere că $\text{grad}\, P = n$, deducem că $P^{(n)} = c$ (constantă nenulă). Deci, $P^{(n)}$ nu are nici un zerou. Contradicția la care s-a ajuns arată că presupunerea făcută este falsă şi, deci, P are cel mult n zerouri distincte.

19. ***Se consideră funcția polinomială*** $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. ***Arătați că ecuația*** $f(x) - f'(x) = 0$ ***are toate rădăcinile reale.***

Soluție: Fie $g(x) = f(x) - f'(x)$ şi $h(x) = e^{-x} f(x)$. Deoarece $h'(x) = e^{-x}\left(-f(x) + f'(x)\right) =$ $= -e^{-x}\left(f(x) - f'(x)\right) = -e^{-x} g(x)$, rezultă că $g(x) = -e^{x} h'(x)$, ceea ce arată că $g(x) = 0$ dacă şi numai dacă $h'(x) = 0$. Remarcăm şi faptul că $h(0) = h(1) = h(2) = h(3)$ (căci $h(0) = f(0) = 0$, $h(1) = e^{-1} f(1) = 0$, $h(2) = e^{-2} f(2) = 0$ şi $h(3) = e^{-3} f(3) = 0$). Având în vedere că h este derivabilă pe $[0,\ 1]$ şi $h(0) = h(1)$, deducem că există $c_1 \in (0,\ 1)$ astfel încât $h(c_1) = 0$, ceea ce implică $g(c_1) = 0$. Analog, arătăm că există $c_2 \in (1,\ 2)$ astfel încât $g(c_2) = 0$ şi există $c_3 \in (2,\ 3)$ astfel încât $g(c_3) = 0$. Cum $\text{grad}\, g = 4$, iar numărul rădăcinilor în $\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{R}$ ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali este par, rezultă că şi cea de a patra rădăcină a ecuației $g(x) = 0$ este în $\boldsymbol{R}$.

20. ***Stabiliți numărul rădăcinilor reale şi precizați intervalele în care acestea se află pentru fiecare dintre ecuațiile*****:**

a) $2x^3 - 6x^2 + 3 = 0$**;** **b)** $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3 = 0$**;**

c) $2x^5 + 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 40x + 3 = 0$**;** **d)** $x^3 - 3x - 24\ \text{arctg}\, x = 0$**.**

Soluție: a) Remarcăm, mai întâi, că ecuația considerată nu are nici o rădăcină în $\boldsymbol{Q}$. Fie funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$. Pentru a putea stabili numărul rădăcinilor reale ale ecuației considerate, trebuie să analizăm şirul lui Rolle asociat funcției *f*. Evident, $f'(x) = 6(x^2 - 2x)$, iar rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x_1' = 0$ şi $x_2' = 2$. Cum $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 3 > 0,\ f(2) = -5 < 0,\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, rezultă că ecuația din enunț are trei rădăcini reale (fie acestea $x_1,\ x_2,\ x_3$) şi că $x_1 \in (-\infty,\ 0),\ x_2 \in (0,\ 2),\ x_3 \in (2,\ \infty)$.

b) Se arată cu uşurință că ecuația considerată nu are nici o rădăcină în $\boldsymbol{Q}$. Fie funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3$. Evident, f este derivabilă, iar $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$. Remarcăm şi faptul că rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x_1' = -1,\ x_2' = 1,\ x_3' = 3$. Deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $f(-1) = -6,\ f(1) = 10,\ f(3) = -6,\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, rezultă că ecuația considerată are patru rădăcini reale simple (fie acestea $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$) şi că $x_1 \in (-\infty,\ -1),\ x_2 \in (-1,\ 1),\ x_3 \in (1,\ 3),\ x_4 \in (3,\ \infty)$.

c) Evidențiem, mai întâi, faptul că ecuația considerată nu are nici o rădăcină în $\boldsymbol{Q}$. Să considerăm funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 40x + 3$. Întrucât $f'(x) = 10x^4 + 20x^3 + 30x^2 - 20x - 40 =$

$= 10\left(x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 4\right) = 10\left[\left(x^4 + 3x^2 - 4\right) + \left(2x^3 - 2x\right)\right] = 10\left[\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 4\right) + 2x\left(x^2 - 1\right)\right] =$

$= 10\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 2x + 4\right)$, rezultă că ecuația $f'(x) = 0$ are doar două rădăcini reale, şi anume $x_1' = -1$, $x_2' = 1$. Remarcând faptul că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 26 > 0,\ f(1) = -30 < 0,\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, deducem că ecuația considerată are trei rădăcini reale şi distincte (fie acestea $x_1,\ x_2,\ x_3$), iar $x_1 \in (-\infty,\ -1)$, $x_2 \in (-1,\ 1),\ x_3 \in (1,\ \infty)$.

d) Fie funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^3 - 3x - 24\ \text{arctg}\, x$. Evident, f este derivabilă, iar $f'(x) = 3x^2 - 3 - \dfrac{24}{x^2 + 1} = \dfrac{3\left(x^2 + 3\right)\left(x^2 - 3\right)}{x^2 + 1}$. Rezultă că ecuația $f'(x) = 0$ are numai două rădăcini reale, iar

acestea sunt $x_1' = -\sqrt{3}$, $x_2' = \sqrt{3}$. Remarcând faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(-\sqrt{3}) = 8\pi > 0$, $f(\sqrt{3}) = -8\pi < 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, conchidem că ecuația considerată are trei rădăcini reale și distincte (fie acestea $x_1,\ x_2,\ x_3$), iar $x_1 \in \left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right)$, $x_2 \in \left(-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right)$, $x_3 \in \left(\sqrt{3},\ \infty\right)$. Observăm și faptul că $x_2 = 0$.

21. ***Stabiliți, în funcție de valorile parametrului real*** m ***, numărul rădăcinilor reale și precizați intervalele în care acestea se află pentru fiecare dintre ecuațiile*****:**

a) $x^3 - 3x + m = 0$ **;** **b)** $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m = 0$ **.**

Soluție: a) Să considerăm funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + m$. Evident, f este derivabilă și $f'(x) = 3(x^2 - 1)$. Rezultă că rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x_1' = -1$, $x_2' = 1$. Remarcăm și faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = m + 2$, $f(1) = m - 2$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Totodată, $f(-1) = 0$ dacă $m = -2$, iar $f(1) = 0$ dacă $m = 2$. Răspunsul la cerința enunțului îl desprindem din tabelul:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	Concluzii
$f(x)$ / m	$-\infty$	$m+2$	$m-2$	$+\infty$	
$(-\infty,\ -2)$	$-$	$-$	$-$	$+$	o rădăcină reală simplă $x_1 \in (1,\ \infty)$
-2	$-$	0	$-$	$+$	trei rădăcini reale: $x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = 2$
$(-2,\ 2)$	$-$	$+$	$-$	$+$	trei rădăcini reale simple: $x_1 \in (-\infty,\ -1)$, $x_2 \in (-1,\ 1)$, $x_3 \in (1,\ \infty)$
2	$-$	$+$	0	$+$	trei rădăcini reale $x_1 = -2,\ x_2 = x_3 = 1$
$(2,\ \infty)$	$-$	$+$	$+$	$+$	o rădăcină reală simplă $x_1 \in (-\infty,\ -1)$

b) Fie funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$. Evident, f este derivabilă, iar $f'(x) = 12x(x^2 - x - 2)$. Rezultă că rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x_1' = -1$, $x_2' = 0$, $x_3' = 2$. Evidențiem și faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $f(-1) = m - 5$, $f(0) = m$, $f(2) = m - 32$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Mai remarcăm că $f(-1) = 0$ dacă $m = 5$, $f(0) = 0$ dacă $m = 0$ și $f(2) = 0$ dacă $m = 32$. Din tabelul:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	Concluzii
$f(x)$ / m	$+\infty$	$m-5$	m	$m-32$	$+\infty$	
$(-\infty,\ 0)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	două rădăcină reale: $x_1 \in (-\infty,\ -1)$, $x_2 \in (2,\ \infty)$
0	$+$	$-$	0	$-$	$+$	patru rădăcini reale: $x_1 = \dfrac{2-2\sqrt{10}}{3}$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = \dfrac{2+2\sqrt{10}}{3}$
$(0,\ 5)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	patru rădăcini reale: $x_1 \in (-\infty,\ -1)$, $x_2 \in (-1,\ 0)$, $x_3 \in (0,\ 2)$, $x_4 \in (2,\ \infty)$
5	$+$	0	$+$	$-$	$+$	patru rădăcini reale $x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = \dfrac{5-\sqrt{10}}{3}$, $x_4 = \dfrac{5+\sqrt{10}}{3}$
$(5,\ 32)$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	două rădăcini reale: $x_1 \in (0,\ 2)$, $x_2 \in (2,\ \infty)$
32	$+$	$+$	$+$	0	$+$	două rădăcini reale: $x_1 = x_2 = 2$
$(32,\ \infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	nici o rădăcină reală

desprindem răspunsul la cele solicitate în enunț.

22. ***Stabiliți, în funcție de valorile parametrului real*** m ***, numărul rădăcinilor reale şi precizați intervalele în care se află acestea pentru fiecare dintre ecuațiile*****:**

a) $x^5 - 5m^4x + 4m^3 = 0$ **;** **b)** $2x^3 - 3(m-1)x^2 - 6mx + 4 = 0$ **.**

Soluție: a) Dacă $m = 0$, atunci ecuația devine $x^5 = 0$. Deci rădăcinile ei sunt $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Fie $m \in \boldsymbol{R}^*$. Să considerăm funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^5 - 5m^4x + 4m^3$. Evident, f este derivabilă, iar $f'(x) = 5\left(x^2 + m^2\right)\left(x^2 - m^2\right)$. Rezultă că rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x_1' = -m$, $x_2' = m$. Remarcăm că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-m) = 4m^3(m^2+1)$, $f(m) = 4m^3(1-m^2)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, iar $\operatorname{sgn} f(-m) = \operatorname{sgn} m$ şi $\operatorname{sgn} f(m) = \operatorname{sgn}\left(m(1-m^2)\right)$. Pentru stabilirea numărului rădăcinilor reale ale ecuației considerate, vom analiza următoarele situații:

1) $m \in (-\infty,\ 0)$. Atunci, răspunsul la cerințele enunțului se desprind din următorul tabel:

x	$-\infty$	m	$-m$	$+\infty$	Concluzii
$f(x)$ / m	$-\infty$	$4m^3(1-m^2)$	$4m^3(m^2+1)$	$+\infty$	
$(-\infty,\ -1)$	$-$	$+$	$-$	$+$	trei rădăcină reale simple: $x_1 \in (-\infty,\ m)$, $x_2 \in (m,\ -m)$, $x_3 \in (-m,\ \infty)$
-1	$-$	0	$-$	$+$	trei rădăcini reale: $x_1 = x_2 = -1,$, $x_3 \in (1,\ \infty)$
$(-1,\ 0)$	$-$	$-$	$-$	$+$	o rădăcină reală simplă $x_1 \in (-m,\ \infty)$

2) $m \in (0,\ \infty)$. Atunci, tabelul

x	$-\infty$	$-m$	m	$+\infty$	Concluzii
$f(x)$ / m	$-\infty$	$4m^3(m^2+1)$	$4m^3(1-m^2)$	$+\infty$	
$(0,\ 1)$	$-$	$+$	$+$	$+$	o rădăcină reală simplă $x_1 \in (-\infty,\ -m)$
1	$-$	$+$	0	$+$	trei rădăcini reale: $x_1 \in (-\infty,\ -1)$, $x_2 = x_3 = 1$
$(1,\ \infty)$	$-$	$+$	$-$	$+$	trei rădăcină reale simple: $x_1 \in (-\infty,\ -m)$, $x_2 \in (-m,\ m)$, $x_3 \in (m,\ \infty)$

răspunde solicitărilor din enunț.

b) Să considerăm funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3(m-1)x^2 - 6mx + 4$. Deoarece $f'(x) = 6\left[x^2 - (m-1)x - m\right]$, rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x_1' = -1$, $x_2' = m$. Remarcăm şi faptul că $f(-1) = 3m + 5$ şi $f(m) = (1-m)(m+2)^2$, iar $\operatorname{sgn} f(-1) = \operatorname{sgn}(3m+5)$ şi $\operatorname{sgn} f(m) = \operatorname{sgn}(1-m)$. Pentru a putea stabilirea numărului rădăcinilor reale ale ecuației considerate, trebuie să avem în vedere următoarele situații:

1) $m \in (-1,\ \infty)$. Atunci, din tabelul

x	$-\infty$	-1	m	$+\infty$	Concluzii
$f(x)$ / m	$-\infty$	$3m+5$	$(1-m)(m+2)^2$	$+\infty$	
$(-1,\ 1)$	$-$	$+$	$+$	$+$	o rădăcină reală simplă $x_1 \in (-\infty,\ -1)$
1	$-$	$+$	0	$+$	trei rădăcini reale: $x_1 = -2$, $x_2 = x_3 = 1$
$(1,\ \infty)$	$-$	$+$	$-$	$+$	trei rădăcină reale simple: $x_1 \in (-\infty,\ -1)$, $x_2 \in (-1,\ m)$, $x_3 \in (m,\ \infty)$

desprindem răspunsul la cerințele enunțului

2) $m=-1$. În acest caz, ecuația considerată conduce la $x^3+3x^2+3x+2=0$, ecuație ce are o singură rădăcină reală, şi anume, -2.

3) $m\in(-\infty,\ -1)$. În acest caz, tabelul

x / $f(x)$ / m	$-\infty$	m	-1	$+\infty$	Concluzii
	$-\infty$	$(1-m)(m+2)^2$	$3m+5$	$+\infty$	
$(-\infty,\ -2)$	$-$	$+$	$-$	$+$	trei rădăcină reale simple: $x_1\in(-\infty,\ m)$, $x_2\in(m,\ -1),\ x_3\in(-1,\ \infty)$
-2	$-$	0	$-$	$+$	trei rădăcini reale: $x_1=x_2=-2$, $x_3=-\frac{1}{2}$
$\left(-2,\ -\frac{5}{3}\right)$	$-$	$+$	$-$	$+$	trei rădăcină reale simple: $x_1\in(-\infty,\ m)$, $x_2\in(m,\ -1),\ x_3\in(-1,\ \infty)$
$-\frac{5}{3}$	$-$	$+$	0	$+$	trei rădăcini reale: $x_1=-2$, $x_2=x_3=-1$
$\left(-\frac{5}{3},\ -1\right)$	$-$	$+$	$+$	$+$	o rădăcină reală simplă $x_1\in(-\infty,\ m)$

răspunde solicitărilor din enunț.

23. ***Fie*** m ***un parametru real şi ecuația*** $\sqrt{x}=m(x+1)$***. Stabiliți, în funcție de valorile parametrului real*** m***, numărul rădăcinilor reale ale ecuației şi precizați intervalele în care acestea se află.***

Soluție: Evident, este necesar ca $x\in[0,\ \infty)$. Atunci, ecuația din enunț este echivalentă cu $\frac{\sqrt{x}}{x+1}-m=0$. Să considerăm funcția $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}-m$. Funcția f este derivabilă pe $(0,\ \infty)$, iar $f'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)}$. Remarcăm că $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Evidențiem şi faptul că $f(0)=-m,\ f(1)=\frac{1}{2}-m$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-m$. Urmărind tabelul:

x / $f(x)$ / m	0	1	$+\infty$	Concluzii
	$-m$	$\frac{1}{2}-m$	$-m$	
$(-\infty,\ 0)$	$+$	$+$	$+$	nici o rădăcină reală
0	0	$+$	0	o rădăcină reală: $x=0$
$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$	$-$	$+$	$-$	două rădăcină reale: $x_1\in(0,\ 1)$, $x_2\in(1,\ \infty)$
$\frac{1}{2}$	$-$	0	$-$	o rădăcină reală: $x=1$
$\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$	$-$	$-$	$-$	nici o rădăcină reală

desprindem răspunsul la cerințele enunțului.

24. ***Stabiliți, în funcție de valorile parametrului real*** m ***, numărul rădăcinilor reale şi precizați intervalele în care se află acestea pentru fiecare dintre ecuațiile*****:**

a) $x^3 - x^2 - \ln x + m = 0$ **;** **b)** $6 \operatorname{arctg} x - x^3 + m = 0$ **;**

c) $x^4 - 4x^2 + mx + 4 = 0$ **;** **d)** $e^x - mx^2 = 0$ **.**

Soluție: a) Evident, este necesar ca $x \in (0,\ \infty)$. Să considerăm funcția $f : (0,\ \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - \ln x + m$. Remarcăm, mai întâi, că $f'(x) = 3x^2 - 2x - \frac{1}{x} = \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(3x^2 + x + 1)}{x}$ şi că $x' = 1$ este singura rădăcină în $(0,\ \infty)$ a ecuației $f'(x) = 0$. Evidențiem şi faptul că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$, $f(1) = m$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Urmărind tabelul:

x	0	1	$+\infty$	Concluzii
$f(x)$ / m	$+\infty$	m	$+\infty$	
$(-\infty,\ 0)$	$+$	$-$	$+$	două rădăcină reale: $x_1 \in (0,\ 1)$, $x_2 \in (1,\ \infty)$
0	$+$	0	$+$	o rădăcină reală: $x = 1$
$(0,\ \infty)$	$+$	$+$	$+$	nici o rădăcină reală

desprindem răspunsul la cerința enunțului.

b) Fie funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 6 \operatorname{arctg} x - x^3 + m$. Evident, f este derivabilă şi $f'(x) = \frac{6}{x^2 + 1} - 3x^2 = \frac{-3(x^4 + x^2 - 2)}{x^2 + 1} = \frac{3(x^2 + 2)(1 - x^2)}{x^2 + 1}$. Rezultă că $x_1' = -1$, $x_2' = 1$ sunt soluțiile ecuației $f'(x) = 0$. Remarcăm şi faptul că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $f(-1) = m + 1 - \frac{3\pi}{2}$, $f(1) = m - 1 + \frac{3\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$. Din tabelul

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	Concluzii
$f(x)$ / m	$+\infty$	$m + 1 - \frac{3\pi}{2}$	$m - 1 + \frac{3\pi}{2}$	$-\infty$	
$(-\infty,\ 1 - \frac{3\pi}{2})$	$+$	$-$	$-$	$-$	o rădăcină reală $x_1 \in (-\infty,\ -1)$
$1 - \frac{3\pi}{2}$	$+$	$-$	0	$-$	două rădăcini reale: $x_1 \in (-\infty,\ -1)$ $x_2 = 1$
$\left(1 - \frac{3\pi}{2},\ -1 + \frac{3\pi}{2}\right)$	$+$	$-$	$+$	$-$	trei rădăcină reale: $x_1 \in (-\infty,\ -1)$, $x_2 \in (-1,\ 1)$, $x_3 \in (1,\ \infty)$
$-1 + \frac{3\pi}{2}$	$+$	0	$+$	$-$	două rădăcini reale: $x_1 = -1$, $x_2 \in (1,\ \infty)$
$\left(-1 + \frac{3\pi}{2},\ \infty\right)$	$+$	$+$	$+$	$-$	o rădăcină reală $x_1 \in (1,\ \infty)$

desprindem răspunsul la cerința enunțului.

c) Deoarece $x = 0$ nu este soluție a ecuației considerate, aceasta este echivalentă cu ecuația $x^3 - 4x + \frac{4}{x} + m = 0$. Să considerăm funcția $f : \boldsymbol{R}^* \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^3 - 4x + \frac{4}{x} + m$. Remarcăm, mai întâi, că f este derivabilă şi că $f'(x) = 3x^2 - 4 - \frac{4}{x^2} = \frac{3x^4 - 4x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x^2 - 2)(3x^2 + 2)}{x^2}$. Rezultă că $x_1' = -\sqrt{2}$ şi

$x_2' = \sqrt{2}$ sunt singurele soluții în $\boldsymbol{R}^*$ ale ecuației $f'(x) = 0$. Evidențiem și faptul că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f\left(-\sqrt{2}\right) = m$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ $f\left(\sqrt{2}\right) = m$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Din cele stabilite anterior se desprind următoarele concluzii:

dacă $m \in (-\infty,\ 0)$, atunci ecuația considerată are două rădăcini reale: $x_1 \in \left(0,\ \sqrt{2}\right)$, $x_2 \in \left(\sqrt{2},\ \infty\right)$;

dacă $m = 0$, atunci ecuația considerată are patru rădăcini reale: $x_1 = x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = x_4 = \sqrt{2}$;

dacă $m \in (0,\ \infty)$, atunci ecuația considerată are două rădăcini reale: $x_1 \in \left(-\infty,\ -\sqrt{2}\right)$, $x_2 \in \left(-\sqrt{2},\ 0\right)$.

d) Întrucât ecuația considerată nu admite pe $x = 0$ ca rădăcină, ea este echivalentă cu ecuația $\dfrac{e^x}{x^2} - m = 0$. Să considerăm funcția $f : \boldsymbol{R}^* \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2} - m$. Evident, f este derivabilă, iar $f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$. Rezultă că $x = 2$ este singura soluție a ecuației $f'(x) = 0$. Remarcăm și faptul că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -m$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$, $f(2) = \dfrac{e^2}{4} - m$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Cele stabilite anterior conduc la următoarele concluzii:

dacă $m \in (-\infty,\ 0)$, atunci ecuația considerată nu are nici o rădăcină în $\boldsymbol{R}$;

dacă $m = 0$, atunci ecuația din enunț nu are nici o rădăcină în $\boldsymbol{R}$;

dacă $m \in \left(0,\ \dfrac{e^2}{4}\right)$, atunci ecuația considerată are o singură rădăcină reală: $x_1 \in \left(-\infty,\ 0\right)$;

dacă $m = \dfrac{e^2}{4}$, atunci ecuația din enunț are două rădăcini reale: $x_1 \in \left(-\infty,\ 0\right)$, $x_2 = 2$;

dacă $m \in \left(\dfrac{e^2}{4},\ +\infty\right)$, atunci ecuația considerată are trei rădăcini reale: $x_1 \in \left(-\infty,\ 0\right)$, $x_2 \in \left(0,\ 2\right)$, $x_3 \in \left(2,\ \infty\right)$.

25. ***Se consideră funcția*** $f : [-2,\ 2] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$. ***Arătați că funcția*** f ***îndeplinește condițiile teoremei lui Lagrange și, apoi, determinați valoarea lui*** c ***care intervine în această teoremă.***

Soluție: Deoarece funcția f este restricția unei funcții raționale, ea este continuă și derivabilă pe $[-2,\ 2]$, deci îndeplinește condițiile teoremei lui Lagrange. Rezultă că există $c \in (-2,\ 2)$ astfel încât $f(2) - f(-2) = f'(c)\big(2 - (-2)\big)$. Cum $f(2) = 1$, $f(-2) = -3$ și $f'(c) = \dfrac{5}{(c+3)^2}$ $\left(\text{căci } f'(x) = \dfrac{5}{(x+3)^2}\right)$, rezultă că $\dfrac{5}{(c+3)^2} = 1$, ceea ce conduce la $c^2 + 6c + 4 = 0$, de unde $c = -3 + \sqrt{5}$ (căci $c \in (-2,\ 2)$).

26. ***Arătați că funcția*** $f : [-1,\ 2] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x \in [-1,\ 1] \\ \dfrac{2}{x}, & x \in (1,\ 2] \end{cases}$ ***îndeplinește condițiile teoremei lui Lagrange și, apoi, determinați numărul*** c ***care intervine în această teoremă.***

Soluție: Se arată cu ușurință că funcția f este continuă și derivabilă atât pe intervalul $[-1,\ 1)$, cât și pe intervalul $(1,\ 2]$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(3 - x^2\right) = 2$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{2}{x} = 2$ și $f(1) = 2$, rezultă că f este continuă în $x = 1$. Având în vedere că $f_s'(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1 - x^2}{x - 1} = -\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x + 1) = -2$, iar

$f'_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\frac{2}{x}-2}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{2(1-x)}{x(x-1)}=-2$, deducem că f este derivabilă în $x=1$. Deci, f este continuă şi derivabilă pe $[-1,\ 2]$ şi, deci, îndeplineşte condiţiile teoremei lui Lagrange. Rezultă că există $c\in(-1,\ 2)$ astfel încât $f(2)-f(-1)=3f'(c)$, de unde $f'(c)=-\dfrac{1}{3}$ (căci $f(-1)=2$ şi $f(2)=1$).

Fie $x\in(-1,\ 1]$. Atunci $f'(x)=-2x$. Rezultă că $-2c=-\dfrac{1}{3}$, de unde $c=\dfrac{1}{6}$. Întrucât $\dfrac{1}{6}\in(-1,\ 1]$, acest număr este o soluţie a problemei.

Fie $x\in(1,\ 2)$. În acest caz, $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$. Rezultă că $-\dfrac{2}{c^2}=-\dfrac{1}{3}$, ceea ce conduce la $c^2=6$, de unde $c=-\sqrt{6}$ sau $c=\sqrt{6}$. Cum atât $-\sqrt{6}$, cât şi $\sqrt{6}$ nu aparţin intervalului $(1,\ 2)$, nici unul dintre ele nu convine.

27. ***Arătaţi că funcţia*** $f:[0,\ e]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-x+2 & ,\ x\in[0,\ 1]\\ 2x-\ln x & ,\ x\in(1,\ e]\end{cases}$ ***îndeplineşte condiţiile teoremei lui Lagrange şi, apoi, determinaţi numărul*** c ***care intervine în această teoremă.***

Soluţie: Se arată cu uşurinţă că funcţia f este continuă şi derivabilă atât pe intervalul $[0,\ 1)$, cât şi pe intervalul $(1,\ e]$. Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(x^2-x+2\right)=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(2x-\ln x)=2$ şi $f(1)=2$, rezultă că f este continuă în $x=1$. Având în vedere că $f'_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}x=1$, iar

$$f'_d(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{2x-\ln x-2}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(2-\frac{\ln x}{x-1}\right)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left[2-\ln(x)^{\frac{1}{x-1}}\right]=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left\{2-\ln\left[1+(x-1)\right]^{\frac{1}{x-1}}\right\}=2-\ln e=1,$$

deducem că f este derivabilă în $x=1$. Drept urmare, f este continuă şi derivabilă pe $[0,\ e]$, ceea ce arată că f îndeplineşte condiţiile din teorema lui Lagrange. Conform acestei teoreme, există $c\in(0,\ e)$ astfel încât $f(e)-f(0)=ef'(c)$, de unde $f'(c)=\dfrac{2e-3}{e}$.

Dacă $x\in(0,\ 1]$, atunci $f'(x)=2x-1$. Rezultă că $2c-1=\dfrac{2e-3}{e}$, ceea ce conduce la $c=\dfrac{3e-3}{2e}$. Remarcând că $0<\dfrac{3e-3}{2e}<1$ (căci $2<e<3$), deducem că $c=\dfrac{3e-3}{2e}$ este soluţie a problemei.

Dacă $x\in(1,\ e)$, atunci $f'(x)=2-\dfrac{1}{x}$. Rezultă că $2-\dfrac{1}{c}=\dfrac{2e-3}{e}$, de unde $c=\dfrac{e}{3}$. Întrucât $\dfrac{e}{3}<1$, $c=\dfrac{e}{3}$ nu convine.

28. ***Fie*** $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ ***şi funcţia*** $f:[-1,\ 1]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x & ,\ x\in[-1,\ 0]\\ x^2+ax+b & ,\ x\in(0,\ 1]\end{cases}$.

a) ***Determinaţi*** a ***şi*** b ***astfel încât*** f ***să îndeplinească condiţiile teoremei lui Lagrange.***

b) ***Pentru*** a ***şi*** b ***astfel determinaţi, aflaţi numărul*** c ***care intervine în această teoremă.***

Soluţie: a) Funcţia f îndeplineşte condiţiile din teorema lui Lagrange dacă f este continuă pe $[-1,\ 1]$ şi este derivabilă pe $(-1,\ 1)$. Cum f este continuă şi derivabilă pe $[-1,\ 0)\cup(0,\ 1]$, cerinţele anterioare sunt îndeplinite dacă f este continuă şi derivabilă în $x=0$. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=b$ şi

$f(0)=1$, deducem că f este continuă în $x=0$ dacă $b=1$. Remarcând că $f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, iar $f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x^2+ax}{x}=a$, rezultă că f este derivabilă în $x=0$ dacă $a=1$.

b) Deoarece $a=1$ şi $b=1$, rezultă că $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\in[-1,\ 0]\\ x^2+x+1, & x\in(0,\ 1]\end{cases}$. Din faptul că f îndeplineşte condiţiile din teorema lui Lagrange deducem că există $c\in(-1,\ 1)$ astfel încât $\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=f'(c)$, de unde $\dfrac{3-e^{-1}}{2}=f'(c)$, ceea ce este totuna cu $f'(c)=\dfrac{3e-1}{2e}$.

Dacă $x\in[-1,\ 0]$, atunci $f'(x)=e^x$, de unde $f'(c)=e^c$. Astfel, egalitatea stabilită anterior conduce la $e^c=\dfrac{3e-1}{2e}$, de unde $c=\ln\dfrac{3e-1}{2e}$. Cum $\dfrac{3e-1}{2e}>1$, rezultă că $\ln\dfrac{3e-1}{2e}>0$, ceea ce arată că $c\notin(-1,\ 0]$. Deci, situaţia considerată nu convine.

Dacă $x\in(0,\ 1)$, atunci $f'(c)=2c+1$. Ţinând seama şi de faptul că $f'(c)=\dfrac{3e-1}{2e}$, deducem $2c+1=\dfrac{3e-1}{2e}$, de unde $c=\dfrac{e-1}{4e}$. Întrucât $0<\dfrac{e-1}{4e}<1$, rezultă că $c=\dfrac{e-1}{4e}$ este soluţia problemei.

29. ***Fie*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ***o funcţie derivabilă. Arătaţi că, dacă*** $f'(x)\neq 0$***, oricare ar fi*** $x\in\boldsymbol{R}$***, atunci funcţia*** f ***este injectivă.***

Soluţie: Presupunem, din contra, că f nu este injectivă. Atunci, există $x_1,\ x_2\in\boldsymbol{R}$ $(x_1<x_2)$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)$. Având în vedere că f este derivabilă pe $[x_1,\ x_2]$, conform teoremei lui Lagrange, există $c\in(x_1,\ x_2)$ astfel încât $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$. Cum $f(x_1)=f(x_2)$, rezultă că $f'(c)(x_2-x_1)=0$, de unde $f'(c)=0$ (căci $x_2-x_1\neq 0$), ceea ce contrazice faptul că $f'(x)\neq 0$ (oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$). Deci, presupunerea făcută este falsă şi, deci, f este injectivă.

30. ***Se consideră funcţia*** $f:[a,\ b]\to\boldsymbol{R}$ ***continuă pe*** $[a,\ b]$ ***şi derivabilă pe*** $(a,\ b)$***. Arătaţi că există*** $c\in(a,\ b)$ ***astfel încât*** $f'(c)=\dfrac{f(a)-f(c)}{c-b}$**.**

Soluţie: Egalitatea pe care trebuie să o demonstrăm poate fi scrisă sub forma $(c-b)f'(c)+f(c)=f(a)$. Această egalitate ne sugerează să considerăm funcţia auxiliară $g:[a,\ b]\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=(x-b)f(x)$. Evident, funcţia g îndeplineşte condiţiile teoremei lui Lagrange. Rezultă că există $c\in(a,\ b)$ astfel încât $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$. Remarcând şi faptul că $g(b)=0$, iar $g'(x)=f(x)+(x-b)f'(x)$, deducem că

$\dfrac{-(a-b)f(a)}{b-a}=f(c)+(c-b)f'(c)$, de unde $f'(c)=\dfrac{f(a)-f(c)}{c-b}$.

31. ***Fie*** $f:[0,\ 2]\to\boldsymbol{R}$ ***o funcţie continuă pe*** $[0,\ 2]$ ***şi de două ori derivabilă pe*** $(0,\ 2)$***. Arătaţi că, dacă*** $f(0)=0,\ \ f(1)=1$ ***şi*** $f(2)=2$***, atunci există*** $c\in(0,\ 2)$ ***astfel încât*** $f''(c)=0$**.**

Soluţie: Deoarece f este continuă pe $[0,\ 1]$ şi derivabilă pe $(0,\ 1)$, rezultă că există $c_1\in(0,\ 1)$ astfel încât $f(1)-f(0)=f'(c_1)(1-0)$, de unde $f'(c_1)=1$. Având în vedere că f este continuă pe $[1,\ 2]$ şi derivabilă pe $(1,\ 2)$, deducem că există $c_2\in(1,\ 2)$ astfel încât $f(2)-f(1)=f'(c_2)(2-1)$, ceea ce conduce la $f'(c_2)=1$. Întrucât funcţia f' este continuă şi derivabilă pe $[c_1,\ c_2]$, iar $f'(c_1)=f'(c_2)$, conform

teoremei lui Rolle, există $c \in (c_1,\ c_2)$ astfel încât $f''(c) = 0$. Cum $(c_1,\ c_2) \subset (0,\ 2)$, rezultă că $c \in (0,\ 2)$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

32. ***Se consideră funcția*** $f:[0,\ 2] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2, & x \in [0,\ 1] \\ 5x + 1, & x \in (1,\ 2] \end{cases}$ ***şi punctele*** $A(0,\ f(0))$, $B(2,\ f(2))$. ***Găsiți un punct*** $M \in G_f$ ***, astfel încât tangenta în*** M ***la*** G_f ***să fie paralelă cu dreapta*** AB***.***

Soluție: Având în vedere interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange, problema este rezolvată dacă găsim un număr $c \in (0,\ 2)$ astfel încât $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2}$. Evident, funcția f este continuă şi derivabilă pe $[0,\ 1) \cup (1,\ 2]$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x^2 + 3x + 2) = 6$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (5x + 1) = 6$ şi $f(1) = 6$, rezultă că f este continuă şi în $x = 1$. Având în vedere că $f'_s(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} =$ $= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x + 4) = 5$, iar $f'_d(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{5x - 5}{x - 1} = 5$, deducem că funcția f este derivabilă şi în $x = 1$. Drept urmare, funcția f este continuă şi derivabilă pe $[0,\ 2]$. Conform teoremei lui Lagrange, există $c \in (0,\ 2)$ astfel încât $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2}$, ceea ce conduce la $f'(c) = \dfrac{9}{2}$. Dacă $x \in (0,\ 1]$, atunci $f'(x) = 2x + 3$. Rezultă că $2c + 3 = \dfrac{9}{2}$, de unde $c = \dfrac{3}{4}$. Cum $\dfrac{3}{4} \in (0,\ 1)$, valoarea găsită reprezintă o soluție a problemei. Se arată cu uşurință că situația în care $x \in (1,\ 2)$ nu convine. Evidențiind şi faptul că $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{77}{16}$, punctul căutat este $M\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{77}{16}\right)$.

33. ***Fie*** $f:[a,\ b] \to \boldsymbol{R}$ ***o funcție derivabilă. Arătați că există în intervalul*** $(a,\ b)$ $n + 1$ ***puncte,*** $c,\ c_1,\ c_2,\ ...,\ c_n$ $(c_1 < c_2 < ... < c_n)$***, astfel încât*** $f'(c_1) + f'(c_2) + ... + f'(c_n) = nf'(c)$ ***.***

Soluție: Împărțim intervalul $[a,\ b]$ în n subintervale de lungimi egale prin punctele $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{n-1}$ $(a < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < b)$. Evident, $a_1 - a = a_2 - a_1 = ... = a_{n-1} - a_{n-2} = b - a_{n-1} = \dfrac{b - a}{n}$. Deoarece f este derivabilă pe $[a,\ a_1]$, conform teoremei lui Lagrange, există $c_1 \in (a,\ a_1)$ astfel încât $f'(c_1) = \dfrac{f(a_1) - f(a)}{a_1 - a} = \dfrac{n(f(a_1) - f(a))}{b - a}$. Analog, arătăm că există $c_2 \in (a_1,\ a_2)$, ..., $c_n \in (a_{n-1},\ b)$ astfel încât să aibă loc, respectiv, următoarele egalități: $f'(c_2) = \dfrac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} = \dfrac{n(f(a_2) - f(a_1))}{b - a}$, ..., $f'(c_n) = \dfrac{f(b) - f(a_{n-1})}{b - a_{n-1}} = \dfrac{n(f(b) - f(a_{n-1}))}{b - a}$. Adunând membru cu membru ultimele n egalități, obținem $f'(c_1) + f'(c_2) + ... + f'(c_n) = \dfrac{n(f(b) - f(a))}{b - a}$. Remarcând faptul că funcția f este derivabilă pe intervalul $[a,\ b]$, deducem că există $c \in (a,\ b)$ astfel încât $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Drept urmare, $f'(c_1) + f'(c_2) + ... + f'(c_n) = nf'(c)$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

34. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+1}$. ***Arătați că există*** $x_k\in(k,\ k+1)\ \left(k\in\boldsymbol{N}^*\right)$ ***astfel încât*** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f'(x_k)=1$.

Soluție: Să considerăm intervalul $\left[k,\ k+1\right]\ \left(k\in\boldsymbol{N}^*\right)$. Deoarece f este derivabilă pe $\left[k,\ k+1\right]$, există $x_k\in(k,\ k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=f'(x_k)$, de unde $\sum\limits_{k=1}^{n}f'(x_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\big(f(k+1)-f(k)\big)=$ $=f(n+1)-f(1)=f(n+1)+1$. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, iar $n+1\to\infty$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}f(n+1)=0$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f'(x_k)=\lim\limits_{n\to\infty}\big(f(n+1)+1\big)=1$.

35. ***Fie*** $a,\ b\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ ***şi*** $a<b$. ***Arătați că*** $(a-b)\ \mathrm{tg}\ b<\ln(\cos b)-\ln(\cos a)<(a-b)\ \mathrm{tg}\ a$.

Soluție: Să considerăm funcția $f:\left[a,\ b\right]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\ln(\cos x)$. Deoarece f este derivabilă pe $\left[a,\ b\right]$, conform teoremei lui Lagrange, există $c\in(a,\ b)$ astfel încât $\ln(\cos b)-\ln(\cos a)=(a-b)\ \mathrm{tg}\ c$ (căci $f'(x)=-\mathrm{tg}\,x$). Cum $0\le a<c<b<\dfrac{\pi}{2}$, rezultă că $\mathrm{tg}\ a<\mathrm{tg}\ c<\mathrm{tg}\ b$, de unde

$$(a-b)\ \mathrm{tg}\ b<(a-b)\ \mathrm{tg}\ c<(a-b)\ \mathrm{tg}\ a\quad(\text{fiindcă}\ a-b<0).$$

Drept urmare, $(a-b)\ \mathrm{tg}\ b<\ln(\cos b)-\ln(\cos a)<(a-b)\ \mathrm{tg}\ a$.

36. ***Se consideră funcția*** $f:\left[2,\ 3\right]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=(x-\pi)\cos x$. ***Arătați că*** $|f(x_2)-f(x_1)|<3|x_2-x_1|$, ***oricare ar fi*** $x_1,\ x_2\in[2,\ 3],\ x_1\ne x_2$.

Soluție: Pentru fixare să presupunem că $x_1<x_2$. Deoarece funcția f este derivabilă pe $\left[x_1,\ x_2\right]$, conform teoremei lui Lagrange, există $c\in\left(x_1,\ x_2\right)$ astfel încât $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\left(x_2-x_1\right)$, de unde $|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(c)||x_2-x_1|$. Remarcând faptul că $f'(x)=\cos x-(x-\pi)\sin x$, iar $c\in(2,\ 3)$, deducem că $|f'(c)|=|\cos c-(c-\pi)\sin c|\le|\cos c|+|c-\pi||\sin c|\le 1+|c-\pi|=\pi+1-c<3$. Ca urmare a celor stabilite anterior, conchidem că $|f(x_2)-f(x_1)|<3|x_2-x_1|$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

37. ***Determinați funcția derivabilă*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, ***știind că*** $2f(x)+f'(x)=0$, ***oricare ar fi*** $x\in\boldsymbol{R}$, ***iar*** $f(0)=2$.

Soluție: Să considerăm funcția auxiliară $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=e^{2x}f(x)$. Remarcăm că g este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, iar $g'(x)=2e^{2x}f(x)+e^{2x}f'(x)=e^{2x}\left(2f(x)+f'(x)\right)$. Rezultă că $g'(x)=0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Drept urmare, $g(x)=c$ (const.), oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, ceea ce conduce la $e^{2x}f(x)=c$, de unde $f(x)=ce^{-2x}$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Având în vedere că $f(0)=2$, deducem că $c=2$ şi, deci $f(x)=2e^{-2x}$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

38. ***Fie*** $n\in\boldsymbol{N}^*$ ***şi funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=C_n^0x+\dfrac{1}{2}C_n^1x^2+\ldots+\dfrac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}$.

a) ***Arătați că*** $f'(x)=(x+1)^n$. ***Deduceți, apoi, că*** $f(x)=\dfrac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1}$.

b) ***Calculați suma*** $S=C_n^0+\dfrac{1}{2}C_n^1+\ldots+\dfrac{1}{n+1}C_n^n$.

Soluție: a) Evident, $f'(x)=C_n^0+C_n^1x+\ldots+C_n^nx^n=(x+1)^n$. Să considerăm funcția auxiliară $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$,

$g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$. Deoarece f este derivabilă, rezultă că g este derivabilă. Totodată, $g'(x)=f'(x)-(x+1)^n$, de unde $g'(x)=0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Drept urmare, $g(x)=c$ (const), oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, ceea ce conduce la $f(x)-\dfrac{(x+1)^{n+1}}{n+1}=c$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Cum $f(0)=0$, deducem că $c=-\dfrac{1}{n+1}$ şi, deci, $f(x)=\dfrac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1}$.

b) Remarcând că $S=f(1)$ şi $f(1)=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$, deducem că $S=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

39. ***Arătaţi că, pentru orice*** $x\in[-1,\ 1]$***, are loc egalitatea*** $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$**.**

Soluţie: Se consideră funcţia $f:[-1,\ 1]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\arcsin x+\arccos x$. Evident, funcţia f este continuă pe $[-1,\ 1]$ şi derivabilă pe $(-1,\ 1)$. Cum $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$, oricare ar fi $x\in(-1,\ 1)$, rezultă că $f(x)=c$ (const), oricare ar fi $x\in(-1,\ 1)$. Ţinând seama şi de faptul că $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$, deducem că $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x\in(-1,\ 1)$. Deoarece f este continuă pe $[-1,\ 1]$, conchidem că $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x\in[-1,\ 1]$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

40. ***Arătaţi că, pentru orice*** $x\in[-1,\ 0]$***, are loc egalitatea*** $\arccos x+\arcsin\sqrt{1-x^2}=\pi$**.**

Soluţie: Se consideră funcţia $f:[-1,\ 0]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\arccos x+\arcsin\sqrt{1-x^2}$. Se arată cu uşurinţă că funcţia f este continuă pe $[-1,\ 0]$ şi derivabilă pe $(-1,\ 0)$. Deoarece

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

oricare ar fi $x\in(-1,\ 0)$, rezultă că $f(x)=c$ (const), oricare ar fi $x\in(-1,\ 0)$. Remarcând şi faptul că funcţia f este continuă pe $[-1,\ 0]$, deducem că $f(x)=c$, oricare ar fi $x\in[-1,\ 0]$. Cum $f(0)=\arccos 0+\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$, conchidem că $f(x)=\pi$, oricare ar fi $x\in[-1,\ 0]$, ceea ce trebuia să arătăm.

41. ***Fie*** $m\in\boldsymbol{R}$ ***şi*** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$**,** $f(x)=m\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$**.** ***Determinaţi*** *m,* ***astfel încât*** $f(x)=c$ ***(const), oricare ar fi*** $x\in(0,\ \infty)$**.** ***Pentru*** *m* ***astfel determinat, aflaţi valoarea lui*** *c***.**

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, că funcţia f este constantă dacă şi numai dacă $f'(x)=0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$. Evidenţiind şi faptul că $f'(x)=\dfrac{m}{1+x^2}-\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{m-1}{1+x^2}$, deducem că $m=1$. Atunci, $f(x)=c$ (oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$). Cum $1\in(0,\ \infty)$, rezultă că $c=f(1)=2\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{2}$.

42. ***Determinaţi*** $a,\ b\in\boldsymbol{R}$**,** ***astfel încât egalitatea*** $a\arcsin\sqrt{x}+b\arcsin\sqrt{1-x}=\pi$ ***să aibă loc pentru orice*** $x\in[0,\ 1]$**.**

Soluție: Să considerăm funcția $f:[0,\ 1]\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=a\arcsin\sqrt{x}+b\arcsin\sqrt{1-x}$. Întrucât $f(x)=\pi$, oricare ar fi $x\in[0,\ 1]$, este necesar ca $f(0)=\pi$ şi $f(1)=\pi$, ceea ce conduce la $b\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$, respectiv $a\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$, de unde $a=b=2$. Pentru a şi b astfel determinați, trebuie să arătăm că $f(x)=\pi$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1)$. Evident, funcția f este derivabilă pe $(0,\ 1)$, iar $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{1-(1-x)}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=0$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1)$. Rezultă că $f(x)=c$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1)$. Cum $c=f\left(\frac{1}{2}\right)=2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cdot\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{4}=\pi$, conchidem că $f(x)=\pi$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1)$. Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

43. ***Se consideră funcțiile*** $f,\ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\arcsin\frac{2x}{x^2+1}$, $g(x)=-2\ \mathrm{arctg}\,x$. ***Arătați că funcțiile*** f ***şi*** g ***diferă printr-o constantă pe anumite intervale. Determinați intervalele şi constantele corespunzătoare.***

Soluție: Deoarece $-1\le\frac{2x}{x^2+1}\le 1$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, rezultă că f este continuă pe R. Remarcând că $-1<\frac{2x}{x^2+1}<1$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}$, deducem că f este derivabilă pe $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$. Evident, g este continuă şi derivabilă pe $\boldsymbol{R}$. Cum

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}}}\cdot\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1}{|x^2-1|}\cdot\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\begin{cases}-\frac{2}{x^2+1}, & x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)\\ \frac{2}{x^2+1}, & x\in(-1,\ 1)\end{cases},$$

iar $g'(x)=-\frac{2}{x^2+1}$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, rezultă că $f'(x)=g'(x)$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)$. Având în vedere că $f'(x)=g'(x)$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1)$, deducem că $f(x)-g(x)=c_1$ (const), oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1)$, ceea ce, împreună cu faptul că f şi g sunt continue în $x=-1$, conduce la $f(x)-g(x)=c_1$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1]$. Ținând seama şi de faptul că $f(-1)-g(-1)=\arcsin(-1)+2\ \mathrm{arctg}\,(-1)=-\frac{\pi}{2}+2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\pi$, conchidem că $f(x)-g(x)=-\pi$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1]$. Analog, arătăm că $f(x)-g(x)=c_2$ (const), oricare ar fi $x\in[1,\ \infty)$. Remarcând că $f(1)-g(1)=\arcsin 1+2\ \mathrm{arctg}\ 1=\pi$, deducem că $f(x)-g(x)=\pi$, oricare ar fi $x\in[1,\ \infty)$.
Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

Observație: Pentru $x\in(-1,\ 1)$, $f'(x)=-g'(x)$ şi, atunci $f(x)+g(x)=c_3$ (const). Cum $f,\ g$ sunt continue pe $[-1,\ 1]$, rezultă că $f(x)+g(x)=c_3$, oricare ar fi $x\in[-1,\ 1]$. Remarcând că $f(0)+g(0)=0$, deducem că $f(x)+g(x)=0$, oricare ar fi $x\in[-1,\ 1]$.

44. ***Arătați că*** $\frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x$***, oricare ar fi*** $x\in(0,\ \infty)$.

Soluție: Să considerăm funcția $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\ln x$. Fie $x>0$. Se arată cu uşurință că restricția lui f la intervalul $[1,\ x+1]$ îndeplineşte condițiile din teorema lui Lagrange. Rezultă că există $c\in(1,\ x+1)$ astfel încât $\frac{f(x+1)-f(1)}{(x+1)-1}=f'(c)$, ceea ce conduce la $\ln(x+1)=\frac{x}{c}$ (căci $f'(x)=\frac{1}{x}$). Având în vedere că

$1 < c < x+1$, deducem că $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < 1$, de unde $\frac{x}{x+1} < \frac{x}{c} < x$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$. Drept urmare, $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$.

45. ***Se consideră funcțiile*** $f,\ g:[0,\ 2] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & x \in [0,\ 1) \\ x+1, & x \in [1,\ 2] \end{cases}$, $g(x) = 3x+1$. ***Arătați că funcțiile*** f ***și*** g ***îndeplinesc condițiile din teorema lui Cauchy și, apoi, determinați numărul*** c ***care intervine în această teoremă.***

Soluție: Evident, f este continuă pe $[0,\ 1) \cup (1,\ 2]$. Cum $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} 2\sqrt{x} = 2$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x+1) = 2$ și $f(1) = 2$, rezultă că f este continuă și în $x = 1$. Deci, funcția f este continuă pe $[0,\ 2]$. Se arată cu ușurință că f este derivabilă pe $(0,\ 1) \cup (1,\ 2)$. Întrucât $f_s'(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{2}{\sqrt{x}+1} = 1$, iar $f_d'(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{x-1}{x-1} = 1$, rezultă că f este derivabilă și în $x = 1$. Deci, f este continuă pe $[0,\ 2]$ și derivabilă pe $(0,\ 2)$. Remarcăm și faptul că g este continuă și derivabilă pe $[0,\ 2]$. Totodată, $g'(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in [0,\ 2]$. Drept urmare, funcțiile f și g îndeplinesc condițiile din teorema lui Cauchy. Ținând seama de aceasta, deducem că există $c \in (0,\ 2)$ astfel încât $\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, de unde $\frac{f'(c)}{3} = \frac{1}{2}$, ceea ce conduce la $f'(c) = \frac{3}{2}$. Dacă $x \in (0,\ 1)$, atunci $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Rezultă că $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{3}{2}$, de unde $c = \frac{4}{9}$. Cum $\frac{4}{9} \in (0,\ 1)$, $c = \frac{4}{9}$ este soluție a problemei. Dacă $x \in [1,\ 2)$, atunci $f'(x) = 1$, iar egalitatea $f'(c) = \frac{3}{2}$ nu este posibilă.

46. ***Fie*** $0 < a < b$ ***și funcția*** $f:[a,\ b] \to \boldsymbol{R}$. ***Arătați că, dacă*** f ***este continuă pe*** $[a,\ b]$ ***și derivabilă pe*** $(a,\ b)$, ***atunci există*** $c \in (a,\ b)$ ***astfel încât*** $\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(c) - cf'(c)$.

Soluție: Egalitatea pe care trebuie să o demonstrăm poate fi scrisă sub forma $\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = f(c) - cf'(c)$, ceea ce ne sugerează să considerăm funcțiile $u,\ v:[a,\ b] \to \boldsymbol{R}$, $u(x) = \frac{f(x)}{x}$, $v(x) = \frac{1}{x}$. Evident, funcțiile u și v sunt continue pe $[a,\ b]$ și derivabile pe $(a,\ b)$. Remarcăm și faptul că $v'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, oricare ar fi $x \in (a,\ b)$. Conform teoremei lui Cauchy, există $c \in (a,\ b)$ astfel încât $\frac{u(b)-u(a)}{v(b)-v(a)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$. Evidențiind și faptul că $\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = f(x) - xf'(x)$, deducem că $\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = f(c) - cf'(c)$.

47. ***Arătați că*** $(x+1)\ln(x+1) > \operatorname{arctg} x$ ***, oricare ar fi*** $x \in (0,\ \infty)$.

Soluție: Să considerăm funcțiile $f, g:[0,\ \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Fie $x > 0$. Se

arată cu uşurinţă că restricţiile lui f şi g la intervalul $[0,\ x]$ îndeplinesc condiţiile din teorema lui Cauchy. Rezultă că există $c\in(0,\ x)$ astfel încât $\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, ceea ce conduce la $\frac{(x+1)\ln(x+1)}{\operatorname{arctg} x}=(1+c^2)\left[1+\ln(c+1)\right]$. Având în vedere că $(1+c^2)\left[1+\ln(c+1)\right]>1$ (căci $c>0$), deducem că $\frac{(x+1)\ln(x+1)}{\operatorname{arctg} x}>1$, de unde $(x+1)\ln(x+1)>\operatorname{arctg} x$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$ (fiindcă $\operatorname{arctg} x>0$).

48. ***Calculaţi*:**

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-5x+6}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-4x^2+5x-2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-\sin^3 x}{x^5}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\ln^2(x+1)}{x^3}$.

Soluţie: a) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2-5x+2\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-5x+6\right)=0$. Deoarece condiţiile din teorema lui l'Hospital (pentru cazul $\frac{0}{0}$) sunt îndeplinite, rezultă că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-5}{2x-5}=-3$.

b) Evident, $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-x^2-x+1\right)=0$ şi $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-4x^2+5x-2\right)=0$. Remarcând faptul că toate condiţiile din teorema lui l'Hospital sunt îndeplinite, deducem că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-4x^2+5x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{3x^2-8x+5}$. Cum $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-2x-1\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-8x+5\right)=0$, iar condiţiile din teorema lui l'Hospital sunt satisfăcute, rezultă că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{3x^2-8x+5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x-2}{6x-8}=-2$. Deci, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-4x^2+5x-2}=-2$.

c) Întrucât $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\sin x\right)=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$, iar condiţiile din teorema lui l'Hospital sunt îndeplinite, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$.

d) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-\sin^3 x}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\sin x}{x^3}\cdot\dfrac{x^2+x\sin x+\sin^2 x}{x^2}\right)$. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x\sin x+\sin^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)=3$, conchidem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-\sin^3 x}{x^5}=\dfrac{1}{2}$.

e) Evident, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}\right)$. Ţinând seama şi de faptul că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{\sin x}\cos x\right)=2$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos x+x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{3\cos x-x\sin x}=\dfrac{1}{3}$, deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\dfrac{2}{3}$.

f) Pentru început, remarcăm că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\ln^2(x+1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+\ln(x+1)}{x}\cdot\dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2}\right)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)=2$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{x+1}}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x+1)}=$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\ln^2(x+1)}{x^3}=1$.

49. ***Calculați*:**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin^2 x+x^2\ln(x+1)}{\sin^3 x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}x}{\sin x-x\cos x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$.

Soluție: a) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin^2 x+x^2\ln(x+1)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}+\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{\ln(x+1)}{\sin x}\right)$. Având în vedere şi faptul că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{\cos x}=1$, deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin^2 x+x^2\ln(x+1)}{\sin^3 x}=2$.

b) Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-e^{-x}-2x\right)=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\sin x\right)=0$, iar condițiile din teorema lui l'Hospital sunt îndeplinite, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$.

c) Evident, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\sin x\right)=0$. Remarcând faptul că toate condițiile din teorema lui l'Hospital sunt îndeplinite, deducem că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}x}{\sin x-x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{x^2+1}}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1-\cos^2 x}{x\sin x}\cdot\frac{1}{(x^2+1)\cos^2 x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+\sin^2 x}{x\sin x}\cdot\frac{1}{(x^2+1)\cos^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\sin x}+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1}{(x^2+1)\cos^2 x}\right]=2.$$

d) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\arcsin x-\operatorname{arctg}x\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$ şi că toate condițiile din teorema lui l'Hospital sunt îndeplinite. Rezultă că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4+3x^2}{x^2\left(1+x^2+\sqrt{1-x^2}\right)}\cdot\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+3}{1+x^2+\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

50. Calculați, în funcție de valorile parametrului real a, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^2e^{ax}-a^2x^2}$.

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^2e^{ax}-a^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-2\sin x\cos x}{x^2e^{ax}-a^2x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{\sin x}{e^{ax}-a^2}\right)$ şi că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$. Dacă $a\neq\pm 1$, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{ax}-a^2\right)=1-a^2\neq 0$. Cum $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^{ax}-a^2}=0$. Drept urmare, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^2e^{ax}-a^2x^2}=0$. Dacă $a=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^{ax}-a^2}$ conduce la $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}$. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{e^x}=1$, conchidem că, în cazul considerat, limita din enunț este 1. Analog, arătăm că, dacă $a=-1$, atunci limita din enunț este -1.

51. ***Determinați valorile lui*** $n \in \boldsymbol{N}$ ***, pentru care există*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^n}$.

Soluție: Fie $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^n}$ $(x\neq 0)$. Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\sin x}{x^3}\cdot\dfrac{1}{x^{n-3}}\right)$ și că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$. Dacă $n\in[0,\ 3)\cap \boldsymbol{N}$, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{n-3}}=\lim\limits_{x\to 0} x^{3-n}=0$. Deci, în acest caz, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Fie $n=3$. Atunci, $x^{n-3}=1$, iar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{6}$. Fie $n\in(3,\ \infty)\cap \boldsymbol{N}$. Dacă n este par, atunci $n-3$ este impar, iar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{n-3}}$, nu există. Prin urmare, nici $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nu există. Dacă n este număr impar, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{n-3}}=\infty$ (căci $n-3\in \boldsymbol{N}^*$ și $n-3$ este număr par), iar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ există dacă $n\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ sau dacă $n\geq 4$ și n este număr natural impar.

52. ***Calculați*****:**

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{e^x}$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+e^x)}{\ln(x+e^{2x})}$.

Soluție: a) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=+\infty$, iar condițiile din teorema lui l'Hospital sunt îndeplinite, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\dfrac{1}{e^x}\right)=1\cdot 0=0$.

b) Evident, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg} x=\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg} 3x=\infty$.

Remarcând și faptul că toate condițiile din teorema lui l'Hospital sunt satisfăcute, deducem că

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}=\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\frac{\overline{\dfrac{1}{\cos^2 x}}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}}=\frac{1}{3}\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\frac{\cos^2 x\left(4\cos^2 x-3\right)^2}{\cos^2 x}=\frac{1}{3}\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\left(4\cos^2 x-3\right)^2=3.$$

c) Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty} x^3=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty$, iar condițiile din teorema lui l'Hospital sunt îndeplinite, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}=3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}=6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x}=0$.

d) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x+e^x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$. Atunci,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1.$$

e) Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x+e^x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x+e^{2x})=\infty$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+e^x)}{\ln(x+e^{2x})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{\dfrac{1+e^x}{x+e^x}}}{\dfrac{1+2e^{2x}}{x+e^{2x}}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+e^x}{1+2e^{2x}}\cdot\frac{x+e^{2x}}{x+e^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{1}{e^x}+1}{e^x\left(\dfrac{1}{e^{2x}}+2\right)}\cdot\frac{e^x\left(\dfrac{x}{e^{2x}}+1\right)}{\dfrac{x}{e^x}+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{1}{e^x}+1}{\dfrac{1}{e^{2x}}+2}\cdot\frac{\dfrac{x}{e^{2x}}+1}{\dfrac{x}{e^x}+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

53. Calculați:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln x$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$; **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(x^2-1\right)e^{\frac{1}{x-1}}$; **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}}\ln(1+x)$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)$.

Soluție: a) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2=0$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$. Atunci,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln x=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2=0.$$

b) Evident, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=\infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. Acest rezultat ne sugerează să scriem limita considerată sub forma $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\infty$, deducem că $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}=-\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{e^{-x}}=2\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}}=0$. Deci $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=0$.

c) Analog, arătăm că limita considerată trebuie scrisă sub forma $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{x^2-1}}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x^2-1}=\infty$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{x^2-1}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{2x}{(x^2-1)^2}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x+1)^2}{x}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$.

d) Se arată cu uşurinţă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}}\ln(1+x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+x)}{e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x+1}$.

Remarcând şi faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x^3}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}}=\infty$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}}\ln(1+x)=\infty$.

e) Evident, $\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}1=0$. Atunci,

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2x^2+2x+1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2+2x+1}=\frac{1}{2}.$$

54. *Calculați*:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x-x)$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\operatorname{arctg}x}\right)$; **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)$.

Soluție: a) Faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$ ne sugerează să scriem limita considerată sub forma $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}=\infty$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)=\infty$. Deci, $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x-x)=\infty$.

b) Evident, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin^2 x}=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$. Acest rezultat ne sugerează să scriem limita considerată sub forma $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$. Remarcăm şi faptul că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+\sin x}{\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}\right)$. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}+1\right)=2$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{2\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$, deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\dfrac{1}{3}$. Drept urmare, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{3}$.

c) Faptul că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\operatorname{arctg} x}=\infty$ ne sugerează să scriem limita din enunț sub forma $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x-x}{x^2\operatorname{arctg} x}$. Evidențiem şi faptul că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x-x}{x^2\operatorname{arctg} x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{2x\operatorname{arctg} x+\dfrac{x^2}{1+x^2}}=$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2(1+x^2)\operatorname{arctg} x+x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4x\operatorname{arctg} x+3}=-\dfrac{1}{3}$. Deci, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\operatorname{arctg} x}\right)=-\dfrac{1}{3}$.

d) Evident, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{\ln(x+1)}=\infty$. Atunci, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{\dfrac{1}{x+1}-1}{\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}}=-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{x}{(x+1)\ln(x+1)+x}=-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{\ln(x+1)+2}=-\dfrac{1}{2}$.

55. ***Calculați*****:**

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(e^x-1)^x$**;** **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)^x$**;** **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}$**.**

Soluție: a) Faptul că $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ ne sugerează să scriem limita considerată sub forma $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}e^{\ln(e^x-1)^x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}e^{x\ln(e^x-1)}$. Remarcând că

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x\ln(e^x-1)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{\ln(e^x-1)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{\dfrac{e^x}{e^x-1}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\cdot e^x\right)$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{x^2}{e^x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{2x}{e^x}=0$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}e^x=1$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x\ln(e^x-1)=0$. Deci, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(e^x-1)^x=e^0=1$.

b) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0}x=0$. Atunci, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)^x=$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(1-\cos x)^x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{x\ln(1-\cos x)}$. Cum $\lim\limits_{x\to 0}x\ln\left(1-\cos x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-\cos x\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{1-\cos x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\sin x=-2\cdot 0=0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)^x=e^0=1$.

c) Evident, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}{x}}$, iar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+1}}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{(x^2+1)^2}}{-\frac{1}{x^2+1}}=-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$, rezultă

că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}=1$.

56. ***Calculaţi*****:**

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+x+1)^{\frac{1}{x+1}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$; **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

Soluţie: a) Faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+x+1)=\infty$, iar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$ ne sugerează să scriem limita considerată sub

forma $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\ln(x^3+x+1)}{x+1}}$. Remarcând şi faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3+x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^3+x+1}=0$, deducem că

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+x+1)^{\frac{1}{x+1}}=e^0=1$.

b) Evident, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$, iar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Atunci, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\ln\frac{e^x}{x}}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x-\ln x}{x}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}=e^1=e$.

c) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1}{\sin x}=+\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\operatorname{tg}x=0$. Atunci, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\operatorname{tg}x}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}e^{\ln\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\operatorname{tg}x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}e^{-\operatorname{tg}x\ln\sin x}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\operatorname{tg}x\ln\sin x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\sin x\cos x=0$,

rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\operatorname{tg}x}=e^0=1$.

57. ***Calculaţi*****:**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{2x^2+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

Soluţie: a) Faptul că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{2x^2+1}=1$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ ne sugerează să scriem limita considerată sub forma

$\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln\left(\frac{x^2+1}{2x^2+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}}$. Remarcând că $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{x^2+1}{2x^2+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{2x^2+1}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left(2x^2+1\right)}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x^2+1}-\frac{2x}{2x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{2}{2x^2+1}\right)=-1$, deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{2x^2+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1}$.

b) Evident, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)=1$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$. Atunci, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}}$. Totodată $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}=1$. Deci,

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}=e$.

c) Remarcăm, mai întâi, că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1-\cos x}=\infty$. Acest rezultat ne sugerează să scriem limita considerată sub forma $\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}}$. Cum $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\frac{x-\sin x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=-1$, conchidem că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}=e^{-1}$.

58. ***Fie*** $a\in\boldsymbol{R}$ ***şi funcţiile derivabile*** $f,\ g:[a,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$ ***cu proprietatea că*** $f(a)=g(a)$ ***şi*** $f'(x)\ge g'(x)$***, oricare ar fi*** $x\in[a,\ \infty)$***. Arătaţi că*** $f(x)\ge g(x)$***, oricare ar fi*** $x\in[a,\ \infty)$**.**

Soluţie: Se consideră funcţia $h:[a,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $h(x)=f(x)-g(x)$. Evident, h este derivabilă pe $[a,\ \infty)$, iar $h'(x)\ge 0$, oricare ar fi $x\in[a,\ \infty)$. Rezultă că h este crescătoare pe $[a,\ \infty)$, ceea ce implică $h(x)\ge h(a)$, oricare ar fi $x\in[a,\ \infty)$. Remarcând şi faptul că $h(a)=0$, deducem că $h(x)\ge 0$, de unde $f(x)\ge g(x)$, oricare ar fi $x\in[a,\ \infty)$.

59. ***Fie*** $m\in\boldsymbol{R}$ ***şi funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{1+mx}{1-x^2}$**. *Determinaţi valorile lui*** m ***pentru care funcţia*** f ***este strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele ce formează domeniul ei de definiţie.***

Soluţie: Se arată cu uşurinţă că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}$, iar $f'(x)=\dfrac{mx^2+2x+m}{(1-x^2)^2}$. Cum $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left(mx^2+2x+m\right)$, rezultă că f este strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 1)$ şi $(1,\ +\infty)$ dacă $mx^2+2x+m\ge 0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$, ceea ce conduce la $m>0$ şi $1-m^2\le 0$, de unde $m\in[1,\ \infty)$.

60. ***Fie*** $m,\ n\in\boldsymbol{R}$ ***şi funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{mx+n}{\sqrt{x^2+x+1}}$**. *Ce condiţie trebuie să îndeplinească*** m ***şi*** n ***astfel încât*** f ***să fie strict monotonă pe*** $\boldsymbol{R}$**?**

Soluţie: Evident, funcţia f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$. Remarcăm şi faptul că $f'(x)=\dfrac{(m-2n)x+2m-n}{2\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Deoarece $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left[(m-2n)x+2m-n\right]$, rezultă că f este strict monotonă pe $\boldsymbol{R}$ doar dacă $(m-2n)x+2m-n$ păstrează acelaşi semn pe $\boldsymbol{R}$, ceea ce are loc atunci când $m-2n=0$. Drept urmare, dacă $m-2n=0$ şi $2m-n>0$, atunci f este strict crescătoare pe $\boldsymbol{R}$, iar dacă $m-2n=0$ şi $2m-n<0$, atunci f este strict descrescătoare pe $\boldsymbol{R}$.

61. ***Stabiliţi intervalele de monotonie şi determinaţi eventualele puncte de extrem local, pentru fiecare dintre funcţiile*****:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2-12x-8$**;** **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$**;**

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$; **d)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\left(x^2-2x\right)e^x$;

e) $f:\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}e^{x^2-x}$.

Soluție: a) Deoarece $f'(x)=6(x^2-x-2)$, rezultă că $f'(x)=0$ dacă și numai dacă $x=-1$ sau $x=2$. Remarcând și faptul că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left(x^2-x-2\right)$, deducem că $f'(x)>0$ dacă $x\in(-\infty,\ -1)\cup(2,\ +\infty)$ și $f'(x)<0$ dacă $x\in(-1,\ 2)$. Drept urmare, f este strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -1]$ și $[2,\ +\infty)$, iar f este strict descrescătoare pe intervalul $[-1,\ 2]$. Totodată, $x=-1$ este punct de maxim, iar $x=2$ este punct de minim pentru funcția f.

b) Întrucât $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, rezultă că $f'(x)=0$ atunci și numai atunci când $x^2+2x=0$, de unde $x=-2$ sau $x=0$. Evidențiem și faptul că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left(x^2+2x\right)$, ceea ce arată că $f'(x)>0$ dacă $x\in(-\infty,\ -2)\cup(0,\ +\infty)$, iar $f'(x)<0$ dacă $x\in(-2,\ 0)$. Prin urmare, f este strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -2]$ și $[0,\ +\infty)$, iar f este strict descrescătoare pe intervalul $[-2,\ 0]$. Totodată, $x=-2$ este punct de maxim, iar $x=0$ este punct de minim pentru funcția f.

c) Cum $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$, rezultă că $f'(x)=0$ dacă și numai dacă $x=1$. Remarcăm și faptul că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(x-1)$. Drept urmare, f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,\ 1]$ și strict crescătoare pe intervalul $[1,\ +\infty)$, iar $x=1$ este punct de minim pentru funcția f.

d) Se arată cu ușurință că $f'(x)=\left(x^2-2\right)e^x$ și că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left(x^2-2\right)$. Evident, $f'(x)=0$ dacă și numai dacă $x=-\sqrt{2}$ sau $x=\sqrt{2}$. Deducem că f este strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $\left(-\infty,\ -\sqrt{2}\right]$ și $\left[\sqrt{2},\ +\infty\right)$, iar f este strict descrescătoare pe intervalul $\left[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right]$. Totodată, $x=-\sqrt{2}$ este punct de maxim, iar $x=\sqrt{2}$ este punct de minim pentru funcția f.

e) Stabilim, mai întâi, că $f'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2}e^{x^2-x}$ și că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left(2x^2-x-1\right)$. Rezultă că $f'(x)=0$ dacă și numai dacă $2x^2-x-1=0$, ceea ce conduce la $x=-\dfrac{1}{2}$ sau $x=1$. Din tabelul

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

deducem că f este strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}\right]$ și $\left[1,\ +\infty\right)$, iar f este strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $\left[-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ și $\left(0,\ 1\right]$. Totodată, $x=-\dfrac{1}{2}$ este punct de maxim, iar $x=1$ este punct de minim.

62. ***Stabiliți intervalele de monotonie și determinați eventualele puncte de extrem local, pentru fiecare dintre funcțiile*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^{x^2}+e^{8-x^2}$; **b)** $f:(0,\ +\infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2\ln x-5\operatorname{arctg} x$;

c) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\left(x^2-4x\right)\ln x-x^2+6x$;

d) $f:(-3,\ 1)\cup(1,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\ln(x+3)+\dfrac{x^2+6x-6}{2\left(x^2+2x-3\right)}$.

Soluție: a) Deoarece $f'(x)=2x\left(e^{x^2}-e^{8-x^2}\right)$, rezultă că $f'(x)=0$ dacă și numai dacă $x=0$ sau $e^{x^2}=e^{8-x^2}$. Evident, $e^{x^2}=e^{8-x^2}\Leftrightarrow x^2=8-x^2\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=-2$ sau $x=2$. Ținând seama că f' este o funcție continuă pe $\boldsymbol{R}$, deducem că f' păstrează un semn constant pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$ și $(2,\ +\infty)$. Cum $f'(-3)<0$, $f'(-1)>0$, $f'(1)<0$ și $f'(3)>0$, rezultă că dacă $x\in(-\infty,\ -2)\cup(0,\ 2)$, atunci $f'(x)<0$, iar dacă $x\in(-2,\ 0)\cup(2,\ +\infty)$, atunci $f'(x)>0$. Deci, f este strict descrescătoare pe $(-\infty,\ -2]$ și pe $[0,\ 2]$, iar f este strict crescătoare pe $[-2,\ 0]$ și pe $[2,\ +\infty)$. Remarcăm și faptul că $x=0$ este punct de maxim, iar $x=-2$ și $x=2$ sunt puncte de minim ale lui *f*.

b) Întrucât $f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2+1}=\dfrac{2x^2-5x+2}{x\left(x^2+1\right)}$, rezultă că $f'(x)=0$ dacă și numai dacă $2x^2-5x+2=0$, ceea ce conduce la $x=\dfrac{1}{2}$ sau $x=2$. Remarcăm și faptul că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left(2x^2-5x+2\right)$ (căci $x>0$). Rezultă că, dacă $x\in\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)\cup(2,\ \infty)$, atunci $f'(x)>0$, iar dacă $x\in\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$, atunci $f'(x)<0$. Drept urmare, f este strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right]$ și $\left[2,\ +\infty\right)$, iar f este strict descrescătoare pe intervalul $\left[\dfrac{1}{2},\ 2\right]$. Totodată, $x=\dfrac{1}{2}$ este punct de maxim, iar $x=2$ este punct de minim pentru funcția *f*.

c) Se arată cu ușurință că $f'(x)=(x-2)(2\ln x-1)$. Rezultă că $f'(x)=0$ dacă și numai dacă $x=\sqrt{e}$ sau $x=2$. Ținând seama de faptul că, dacă $x\in\left(0,\ \sqrt{e}\right)$, atunci $2\ln x-1<0$, iar dacă $x\in\left(\sqrt{e},\ \infty\right)$, atunci $2\ln x-1>0$, deducem că $f'(x)>0$ dacă $x\in\left(0,\ \sqrt{e}\right)\cup(2,\ \infty)$ și că $f'(x)<0$ dacă $x\in\left(\sqrt{e},\ 2\right)$. Deci, f este strict crescătoare atât pe $\left(0,\ \sqrt{e}\right]$, cât și pe $\left[2,\ +\infty\right)$ și este strict descrescătoare pe $\left[\sqrt{e},\ 2\right]$. Remarcăm și faptul că $x=\sqrt{e}$ este punct de maxim, iar $x=2$ este punct de minim.

d) Cum $f'(x)=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{-2x^2+3x-3}{(x-1)^2(x+3)^2}=\dfrac{x(x^2-x-2)}{(x-1)^2(x+3)^2}$, rezultă că egalitatea $f'(x)=0$ are loc dacă și numai dacă $x=-1$ sau $x=0$ sau $x=2$ și că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left[x(x^2-x-2)\right]$. Prin urmare, dacă $x\in\left(-3,\ -1\right)\cup(0,\ 1)\cup(1,\ 2)$, atunci $f'(x)<0$, iar dacă $x\in\left(-1,\ 0\right)\cup(2,\ \infty)$, atunci $f'(x)>0$. Deducem că f este strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $\left(-3,\ -1\right]$, $[0,\ 1)$, $(1,\ 2]$ și că este strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $\left[-1,\ 0\right]$ și $[2,\ \infty)$. Remarcăm și faptul că $x=0$ este punct de maxim, iar $x=-1$ și $x=2$ sunt puncte de minim ale funcției *f*.

63. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3+3x^2 & ,\ x\in\left(-\infty,\ 0\right]\\ \dfrac{x}{x^2+1} & ,\ x\in\left(0,\ \infty\right)\end{cases}$. ***Determinați intervalele de monotonie și stabiliți eventualele puncte de extrem local ale lui*** *f*.

Soluție: Se observă cu ușurință că f este continuă și derivabilă pe $\boldsymbol{R}^*$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=$ $=f(0)$, rezultă că f este continuă și în $x=0$. Remarcând că $f_s'(0)=0$ și $f_d'(0)=1$, deducem că f nu este derivabilă în $x=0$. Evidențiem și faptul că $f'(x)=\begin{cases}3(x^2+2x) & ,\ x\in\left(-\infty,\ 0\right)\\ \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & ,\ x\in\left(0,\ \infty\right)\end{cases}$. Rezultă că

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ sau $x=1$. Totodată, $f'(x)>0$ dacă $x\in(-\infty,\ -2)\cup(0,\ 1)$, iar $f'(x)<0$ dacă $x\in(-2,\ 0)\cup(1,\ \infty)$. Drept urmare, f este strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -2]$, $[0,\ 1]$ şi strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $[-2,\ 0]$ şi $[1,\ \infty)$, iar $x=-2$ şi $x=1$ sunt puncte de maxim local ale lui f şi $x=0$ este punct de minim local al lui f.

64. ***Fie*** $a\in\boldsymbol{R}^*$ ***şi funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+1}$. ***Determinaţi valorile lui*** a, ***astfel încât*** $\operatorname{Im} f=[-1,\ 3]$.

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ şi că $f'(x)=\dfrac{a(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$. Fie $a\in(-\infty,\ 0)$. Atunci, $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(1-x^2)$. Prin urmare, $f'(x)<0$ dacă $x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$, iar $f'(x)>0$ dacă $x\in(-1,\ 1)$. Rezultă că f este strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -1]$ şi $[1,\ \infty)$, iar f este strict crescătoare pe $[-1,\ 1]$. Deducem că $x=-1$ este punct de minim al lui f, iar $x=1$ este punct de maxim al lui f. Ţinând seama şi de faptul că $f(-1)=\dfrac{a+2}{2}$, $f(1)=\dfrac{2-a}{2}$, iar f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, conchidem că $\operatorname{Im} f=\left[\dfrac{a+2}{2},\ \dfrac{2-a}{2}\right]$. Totodată, $\operatorname{Im} f=[-1,\ 3]$, deci $\dfrac{a+2}{2}=-1$ şi $\dfrac{2-a}{2}=3$, de unde $a=-4$. Fie $a\in(0,\ \infty)$. Atunci, $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(x^2-1)$. Drept urmare, $f'(x)>0$ dacă $x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$, iar $f'(x)<0$ dacă $x\in(-1,\ 1)$. Rezultă că f strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -1]$ şi $[1,\ \infty)$, iar f este strict descrescătoare pe $[-1,\ 1]$. Deducem că $x=-1$ este punct de maxim al lui f, iar $x=1$ este punct de minim al lui f. În consecinţă, $\operatorname{Im} f=\left[\dfrac{2-a}{2},\ \dfrac{a+2}{2}\right]$. Totodată, $\operatorname{Im} f=[-1,\ 3]$, deci $\dfrac{2-a}{2}=-1$ şi $\dfrac{a+2}{2}=3$, de unde $a=4$.

65. ***Se consideră funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}$.

a) ***Studiaţi derivabilitatea funcţiei*** f.

b) ***Determinaţi intervalele de monotonie ale lui*** f ***şi stabiliţi eventualele puncte de extrem local ale lui*** f.

Soluţie: a) Evident, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in(-\infty,\ -1]\cup[1,\ \infty)\\ \dfrac{1-x^2}{x^2+1}, & x\in(-1,\ 1)\end{cases}$. Remarcăm şi faptul că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$ şi derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}$, iar $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}, & x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)\\ -\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}, & x\in(-1,\ 1)\end{cases}$. Folosind una dintre consecinţele teoremei lui Lagrange, stabilim că $f'_s(-1)=-1$, $f'_d(-1)=1$, $f'_s(1)=-1$ şi $f'_d(1)=1$.

b) Se arată cu uşurinţă că $f'(x)=0$ dacă şi numai dacă $x=0$, iar $f'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)$ şi $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(-1,\ 0)\cup(1,\ \infty)$. Rezultă că f este strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -1]$, $[0,\ 1]$ şi strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $[-1,\ 0]$ şi $[1,\ \infty)$. Totodată, $x=-1$ şi $x=1$ sunt puncte de minim local ale lui f, iar $x=0$ este punct de maxim local al lui f.

66. ***Se consideră funcția*** $f:(-\infty,\ 0]\cup[2,\ \infty)\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-2x}-x$. ***Determinați intervalele de monotonie ale lui*** f ***și aflați eventualele puncte de extrem local ale lui*** f. ***Stabiliți, apoi,*** $\operatorname{Im} f$.

Soluție: Se arată cu ușurință că f este continuă pe $(-\infty,\ 0]\cup[2,\ \infty)$, derivabilă pe $(-\infty,\ 0)\cup(2,\ \infty)$, iar $f'(x)=\dfrac{x-1-\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}}$. Evident, $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left(x-1-\sqrt{x^2-2x}\right)$. Remarcăm și faptul că $f'(x)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x-1=\sqrt{x^2-2x}\Leftrightarrow x\geq 2$ și $(x-1)^2=x^2-2x$. Cum ultima egalitate nu este posibilă, rezultă că $f'(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ 0)\cup(2,\ \infty)$. Fie $g:(-\infty,\ 0]\cup[2,\ \infty)\to \boldsymbol{R}$, $g(x)=x-1-\sqrt{x^2-2x}$. Deoarece g este continuă, $g(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ 0]\cup[2,\ \infty)$, iar $g(-1)=-2-\sqrt{3}<0$ și $g(3)=2-\sqrt{3}>0$, rezultă că $g(x)<0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ 0)$, iar $g(x)>0$, oricare ar fi $x\in(2,\ \infty)$. Drept urmare, $f'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ 0)$, iar $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(2,\ \infty)$, ceea ce arată că f este strict descrescătoare pe $(-\infty,\ 0]$ și strict crescătoare pe $[2,\ \infty)$. Totodată, $x=0$ și $x=2$ sunt puncte de minim local ale lui f. Având în vedere că f este continuă și strict descrescătoare pe $(-\infty,\ 0]$, iar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ și $f(0)=0$, deducem că, dacă $x\in(-\infty,\ 0]$, atunci $f(x)$ ia orice valoare din intervalul $[0,\ \infty)$. Cum f este continuă și strict crescătoare pe $[2,\ \infty)$, iar $f(2)=-2$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$, rezultă că, dacă $x\in[2,\ \infty)$, atunci $f(x)$ ia orice valoare din intervalul $[-2,\ -1)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\operatorname{Im} f=[-2,\ -1)\cup[0,\ \infty)$.

67. ***Se consideră funcția*** $f:(1,\ \infty)\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}$. ***Studiați monotonia funcției*** f ***și, apoi, determinați*** $\operatorname{Im} f$.

Soluție: Pentru început, remarcăm că funcția f este derivabilă pe $(1,\ \infty)$ și că $f'(x)=\dfrac{\dfrac{\ln x}{x-1}-\dfrac{\ln(x-1)}{x}}{\ln^2 x}=$ $=\dfrac{x\ln x-(x-1)\ln(x-1)}{x(x-1)\ln^2 x}$. Deoarece $x(x-1)\ln^2 x>0$, oricare ar fi $x\in(1,\ \infty)$, rezultă că $\operatorname{sgn} f'(x)=$ $=\operatorname{sgn}\left[x\ln x-(x-1)\ln(x-1)\right]$. Să considerăm funcția $g:(1,\ \infty)\to \boldsymbol{R}$, $g(x)=x\ln x-(x-1)\ln(x-1)$. Evident, g este derivabilă pe $(1,\ \infty)$, iar $g'(x)=\ln x-\ln(x-1)$. Cum $\ln x>\ln(x-1)$ (căci $x>x-1$), rezultă că $g'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(1,\ \infty)$. Deci, g este strict crescătoare pe $(1,\ \infty)$. Ținând seama și de faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)=0$ (fiindcă $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1)\ln(x-1)=0$), deducem că $g(x)>0$, oricare ar fi $x\in(1,\ \infty)$. Drept urmare, $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(1,\ \infty)$, ceea ce arată că f este strict crescătoare pe $(1,\ \infty)$. Evidențiind și faptul că f este continuă pe $(1,\ \infty)$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ (fiindcă $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$), conchidem că $\operatorname{Im} f=(-\infty,\ 1)$.

68. ***Se consideră funcția*** $f:(0,\ \infty)\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. ***Studiați monotonia funcției*** f ***și, apoi, determinați*** $\operatorname{Im} f$.

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că funcția f este derivabilă pe $(0,\ \infty)$ și că $f(x)=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Rezultă că $f'(x)=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right]$. Se observă cu ușurință că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right]$. Să

considerăm funcția $g:(0,\ \infty)\to \boldsymbol{R}$, $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$. Evident, g este derivabilă pe $(0,\ \infty)$, iar $g'(x)=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}$. Rezultă că $g'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$, ceea ce arată că g este strict descrescătoare pe $(0,\ \infty)$. Având în vedere şi faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$, deducem că $g(x)>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$. Deci $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$ şi, deci, f este strict crescătoare pe $(0,\ \infty)$. Evidențiem şi faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^0=1$ (căci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=$ $=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{1+t}=0$). Totodată, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=e$. Cum f este continuă pe $(0,\ \infty)$, conchidem că $\operatorname{Im} f=(1,\ e)$.

69. ***Determinați funcția polinomială $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ de grad minim, ştiind că graficul ei admite punctele $A(1,\ 2)$ şi $B(2,\ 1)$ ca puncte de extrem local.***

Soluție: Pentru ca funcția polinomială f să aibă două puncte de extrem local, este necesar ca $\operatorname{grad} f\geq 3$. Întrucât $\operatorname{grad} f$ trebuie să fie minim, vom considera, mai întâi, că $\operatorname{grad} f=3$. Atunci, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\ b,\ c,\ d\in\boldsymbol{R}$ şi $a\neq 0)$. Deoarece A şi B sunt puncte ale lui G_f, rezultă că $f(1)=2$ şi $f(2)=1$, de unde $a+b+c+d=2$, respectiv $8a+4b+2c+d=1$. Având în vedere că 1 şi 2 sunt puncte de extrem ale funcției f, deducem că $f'(1)=0$ şi $f'(2)=0$. Drept urmare, $3a+2b+c=0$, respectiv $12a+4b+c=0$. Rezolvând sistemul format din ecuațiile $a+b+c+d=2$, $8a+4b+2c+d=1$, $3a+2b+c=0$ şi $12a+4b+c=0$, obținem $a=2$, $b=-9$, $c=12$ şi $d=-3$. Prin urmare, $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$.

70. ***Determinați valorile parametrului real m, astfel încât funcția $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{x^2-m}{x+1}e^x$ să aibă trei puncte de extrem local.***

Bacalaureat, sesiunea august, 1999

Soluție: Funcția f are trei puncte de extrem local dacă derivata ei are trei rădăcini reale distincte. Deoarece $f'(x)=\frac{x(x^2+2x+2-m)}{(x+1)^2}e^x$, rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x^2+2x+2-m)=0$, de unde $x=0$ sau $x^2+2x+2-m=0$. Prin urmare, ecuația $f'(x)=0$ are trei rădăcini reale distincte dacă şi numai dacă ecuația $x^2+2x+2-m=0$ are rădăcinile reale şi distincte, iar -1 şi 0 nu sunt rădăcini ale acestei ecuații. Rădăcinile ecuației $x^2+2x+2-m=0$ sunt reale şi diferite dacă $4-4(2-m)>0$, ceea ce conduce la $m>1$. Remarcăm şi faptul că -1 şi 0 nu sunt rădăcini ale ecuației dacă $m\neq 1$, respectiv $m\neq 2$. Deci, $m\in(1,\ 2)\cup(2,\ \infty)$.

71. ***Fie $a\in\boldsymbol{R}^*$ şi funcția $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=ax^2+4x-2\ln x$. Determinați, în funcție de valorile lui a, numărul punctelor de extrem local ale funcției f.***

Soluție: Evident, funcția f este derivabilă şi $f'(x)=\frac{2(ax^2+2x-1)}{x}$. Remarcăm faptul că $f'(x)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ax^2+2x-1=0$ şi că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(ax^2+2x-1)$. Astfel, deducem că aflarea numărului punctelor de extrem local ale lui f impune stabilirea numărului rădăcinilor reale ale ecuației $ax^2+2x-1=0$ şi care, totodată, sunt situate în intervalul $(0,\ \infty)$. Fie Δ discriminantul acestei ecuații şi $x_1,\ x_2$ $(x_1\leq x_2)$ rădăcinile

ei. Se arată cu uşurinţă că $\Delta = 4(a+1)$, $x_1x_2 = -\frac{1}{a}$ şi $x_1 + x_2 = -\frac{2}{a}$. Fie $a \in (-\infty,\ -1)$. Atunci, $\Delta < 0$, iar $x_1,\ x_2 \notin \boldsymbol{R}$. Deci, în acest caz, f nu are nici un punct de extrem local. Dacă $a = -1$, atunci $x_1 = x_2 = 1$, iar $f'(x) = \frac{-2(x-1)^2}{x} \le 0$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$. Rezultă că f nu are nici un punct de extrem local. Fie $a \in (-1,\ 0)$. În acest caz, $\Delta > 0$, $x_1x_2 > 0$ şi $x_1 + x_2 > 0$. Drept urmare, $x_1 \ne x_2$, $x_1 > 0$ şi $x_2 > 0$, iar f are două puncte de extrem local. Mai mult, x_1 este punct de minim, iar x_2 este punct de maxim. Dacă $a \in (0,\ \infty)$, atunci $\Delta > 0$ şi $x_1x_2 < 0$. Rezultă că $x_1 < 0$ şi $x_2 > 0$. Prin urmare, f are un singur punct de extrem local. Se arată cu uşurinţă că acesta este punct de minim.

72. ***Determinaţi valorile parametrului real m, astfel încât funcţia $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x + 1$ să aibă două puncte de extrem local, iar acestea să aparţină intervalului $(-2,\ 4)$.***

Soluţie: Remarcăm, mai întâi, faptul că funcţia f are două puncte de extrem local, ambele situate în intervalul $(-2,\ 4)$, dacă ecuaţia $f'(x) = 0$ are două rădăcini reale distincte, iar acestea aparţin intervalului $(-2,\ 4)$. Evident, $f'(x) = 3x^2 - 6mx + 3(m^2-1)$. Fie $x_1,\ x_2$ rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$. Remarcăm faptul că x_1 şi x_2 îndeplinesc cerinţele stabilite anterior dacă şi numai dacă $\Delta > 0$, $f'(-2) > 0$, $f'(4) > 0$ şi $-2 < \frac{x_1 + x_2}{2} < 4$. Întrucât $\Delta = 36$ condiţia $\Delta > 0$ este îndeplinită. Deoarece $f'(-2) = 3(m^2 + 4m + 3)$, cerinţa ca $f'(-2) > 0$ impune ca $m \in (-\infty,\ -3) \cup (-1,\ +\infty)$. Având în vedere că $f'(4) = 3(m^2 - 8m + 15)$, deducem că $f'(4) > 0$ dacă $m \in (-\infty,\ 3) \cup (5,\ +\infty)$. Cum $x_1 + x_2 = 2m$, rezultă că $-2 < \frac{x_1 + x_2}{2} < 4$ dacă $m \in (-2,\ 4)$. Drept urmare, $m \in (-1,\ 3)$.

73. ***Fie $a \in \boldsymbol{R}^*$ şi funcţia $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \frac{ax+1}{x^2+1}$.***

a) ***Arătaţi că f are două puncte de extrem şi anume, un punct de minim şi unul de maxim.***

b) ***Fie m minimul lui f şi M maximul lui f. Demonstraţi că $m + M = 1$.***

Soluţie: a) Remarcăm, mai întâi, că funcţia f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ şi că $f'(x) = \frac{-ax^2 - 2x + a}{(x^2+1)^2}$. Rezultă că $\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(-ax^2 - 2x + a)$, iar $f'(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + 2x - a = 0$. Având în vedere că discriminantul acestei ecuaţii este $4(1 + a^2) > 0$, deducem că ecuaţia are două rădăcini reale şi distincte. Evidenţiem şi faptul că aceste rădăcini sunt $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+a^2}}{a}$, $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+a^2}}{a}$. Dacă $a \in (-\infty,\ 0)$, atunci $x_1 > x_2$. Totodată, $f'(x) < 0$, oricare ar fi $x \in (x_2,\ x_1)$, iar $f'(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (-\infty,\ x_2) \cup (x_1,\ \infty)$. Rezultă că f este strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ x_2]$ şi $[x_1,\ \infty)$, este strict descrescătoare pe $[x_2,\ x_1]$, iar x_2 este punct de maxim al lui f şi x_1 este punct de minim al lui f. Dacă $a \in (0,\ \infty)$, atunci $x_1 < x_2$. Evidenţiind faptul că $f'(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (x_1,\ x_2)$, iar $f'(x) < 0$, oricare ar fi $x \in (-\infty,\ x_1) \cup (x_2,\ \infty)$, deducem că f este strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ x_1]$ şi $[x_2,\ \infty)$, iar f este strict crescătoare pe $[x_1,\ x_2]$. Totodată, x_1 este punct de minim al lui f şi x_2 este punct de maxim al lui f.

b) Evident $m + M = f(x_1) + f(x_2)$. Deoarece x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $ax^2 + 2x - a = 0$, rezultă că $x_1x_2 = -1$, de unde $x_2 = -\frac{1}{x_1}$. Drept urmare, $m + M = f(x_1) + f\left(-\frac{1}{x_1}\right) = \frac{ax_1 + 1}{x_1^2 + 1} + \frac{-\frac{a}{x_1} + 1}{\frac{1}{x_1^2} + 1} =$

$= \dfrac{ax_1+1}{x_1^2+1} + \dfrac{x_1^2-ax_1}{x_1^2+1} = 1$.

74. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ **,** $f(x)=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{9-x}$ **.**

a) ***Determinați intervalele de monotonie ale lui*** f **.**

b) ***Comparați numerele*** $a=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}$ ***și*** $b=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}$ **.**

Soluție: a) Remarcăm, mai întâi, că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 9\}$ și că

$f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(9-x)^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{(9-x)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}}{3\sqrt[3]{(x+1)^2(9-x)^2}}$. Evident, $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left(\sqrt[3]{(9-x)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)$, iar

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(9-x)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow (9-x)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow 20x-80=0 \Leftrightarrow x=4 .$$

Să considerăm funcția $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=\sqrt[3]{(9-x)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}$. Ținând seama că g este continuă pe $\boldsymbol{R}$, că $g(x)=0 \Leftrightarrow x=4$ și că $g(0)>0$, iar $g(5)<0$, deducem că $g(x)>0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ 4)$ și că $g(x)<0$, oricare ar fi $x\in(4,\ \infty)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 4)$, iar $f'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(4,\ 9)\cup(9,\ \infty)$. Având în vedere și faptul că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, conchidem că f este strict crescătoare pe $(-\infty,\ 4]$ și strict descrescătoare pe $[4,\ \infty)$.

b) Pentru început, remarcăm că $a=f(2)$ și $b=f(3)$. Deoarece $2,\ 3\in(-\infty,\ 4]$, iar f este strict crescătoare pe $(-\infty,\ 4]$, rezultă că $f(2)<f(3)$. Deci, $a<b$.

75. ***Se consideră funcția*** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$ **,** $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **.**

a) ***Studiați monotonia funcției*** f **.**

b) ***Comparați numerele*** $3^{\sqrt{5}}$ ***și*** $5^{\sqrt{3}}$ **.**

Soluție: a) Remarcăm, mai întâi, că funcția f este derivabilă și că $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$. Rezultă că $f'(x)=0$ dacă și numai dacă $x=e^2$ și că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(2-\ln x)$. Având în vedere că funcția $g:(0,\ 2)\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=2-\ln x$ este continuă și că $g(1)=2>0$, iar $g(e^3)=-1<0$, deducem că $g(x)>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ e^2)$ și $g(x)<0$, oricare ar fi $x\in(e^2,\ \infty)$. Drept urmare, f este strict crescătoare pe $(0,\ e^2]$ și strict descrescătoare pe $[e^2,\ \infty)$, iar $x=e^2$ este punct de maxim al lui f .

b) Deoarece $0<3<5<e^2$, iar funcția f este strict crescătoare pe $(0,\ e^2]$, rezultă că $f(3)<f(5)$, ceea ce conduce la $\dfrac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\dfrac{\ln 5}{\sqrt{5}}$, de unde $\sqrt{5}\ln 3<\sqrt{3}\ln 5$. Deci, $\ln 3^{\sqrt{5}}<\ln 5^{\sqrt{3}}$ și, deci, $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.

76. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ **,** $f(x)=\ln(1+x^2)$ **.**

a) ***Studiați monotonia funcției*** f **.**

b) ***Determinați valorile lui*** x **,** ***știind că*** $f(x)+f(9x)=f(2x)+f(10x)$ **.**

Soluție: a) Remarcăm, mai întâi, că funcția f este derivabilă și că $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$. Deoarece $f'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ 0)$ și $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(-\infty,\ 0]$ și strict crescătoare pe $[0,\ \infty)$, iar $x=0$ este punct de minim al lui f .

b) Evidențiind faptul că $f(0)=0$, deducem că $x=0$ satisface egalitatea din enunț. Fie $x\in(-\infty,\ 0)$. Atunci, $x>2x$ și $9x>10x$. Cum f este strict descrescătoare pe $(-\infty,\ 0)$, rezultă că $f(x)<f(2x)$ și $f(9x)<f(10x)$, de unde $f(x)+f(9x)<f(2x)+f(10x)$. Deci, nu există nici un $x\in(-\infty,\ 0)$ astfel încât $f(x)+f(9x)=f(2x)+f(10x)$. Fie $x\in(0,\ \infty)$. În acest caz, $x<2x$ și $9x<10x$. Având în vedere că f este strict crescătoare pe $(0,\ \infty)$, deducem că $f(x)<f(2x)$ și $f(9x)<f(10x)$, de unde

$f(x)+f(9x)<f(2x)+f(10x)$. Prin urmare, nu există nici un $x\in(0,\ \infty)$ astfel încât $f(x)+f(9x)=$ $=f(2x)+f(10x)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $x=0$ este singura soluție a problemei.

77. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$**,** $f(x)=2^x+2^{-x}$**.**

a) ***Studiați monotonia funcției*** f**.**

b) ***Determinați valorile lui*** $x\in[0,\ \infty)$**,** ***astfel încât*** $f(x)+f(x^9)=f(x^2)+f(x^{10})$**.**

Soluție: a) Se arată cu uşurință că f este derivabilă şi că $f'(x)=\dfrac{2^{2x}-1}{2^x}\ln 2$. Evident, $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left(2^{2x}-1\right)$, iar $f'(x)=0$ dacă şi numai dacă $x=0$. Rezultă că $f'(x)<0$ dacă $x\in(-\infty,\ 0)$, iar $f'(x)>0$ dacă $x\in(0,\ \infty)$. Deducem că f este strict descrescătoare pe $(-\infty,\ 0]$ şi strict crescătoare pe $[0,\ \infty)$, iar $x=0$ este punct de minim al lui f.

b) Remarcăm, mai întâi, că egalitatea considerată este satisfăcută atât de $x=0$, cât şi de $x=1$. Fie $x\in(0,\ 1)$. Atunci, $x>x^2$ şi $x^9>x^{10}$. Cum f este strict crescătoare pe $(0,\ 1)$, rezultă că $f(x)>f(x^2)$ şi $f(x^9)>f(x^{10})$, de unde $f(x)+f(x^9)>f(x^2)+f(x^{10})$. Deci, nu există nici un $x\in(0,\ 1)$ astfel încât $f(x)+f(x^9)=f(x^2)+f(x^{10})$. Fie $x\in(1,\ \infty)$. În acest caz, $x<x^2$ şi $x^9<x^{10}$. Având în vedere că f este strict crescătoare pe $(1,\ \infty)$, rezultă că $f(x)<f(x^2)$ şi $f(x^9)<f(x^{10})$, ceea ce implică $f(x)+f(x^9)<f(x^2)+f(x^{10})$. Drept urmare, nu există nici un $x\in(1,\ \infty)$ astfel încât $f(x)+f(x^9)=$ $=f(x^2)+f(x^{10})$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $x=0$ şi $x=1$ sunt singurele soluții ale problemei.

78. a) ***Studiați monotonia funcției*** $f:(0,\ 1]\to\boldsymbol{R}$**,** $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$**.**

b) ***Stabiliți ce condiții trebuie să îndeplinească numerele reale*** a ***şi*** b ***astfel încât, pentru orice*** $x\in[0,\ 1]$**,** ***să avem*** $1+ax\le e^x\le 1+bx$**.**

Soluție: a) Pentru început, remarcăm că f este derivabilă pe $(0,\ 1]$, că $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$ şi că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\left(xe^x-e^x+1\right)$. Să considerăm funcția $g:[0,\ 1]\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=xe^x-e^x+1$. Deoarece $g'(x)=xe^x>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1]$, rezultă că g este strict crescătoare pe $[0,\ 1]$. Ținând seama şi de faptul că g este continuă pe $[0,\ 1]$, iar $g(0)=0$, deducem că $g(x)>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1]$. Prin urmare, $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1]$, ceea ce arată că f este strict crescătoare pe $(0,\ 1]$.

b) Pentru $x=0$, relațiile din enunț au loc ca egalități. Fie $x\in(0,\ 1]$. Atunci, $1+ax\le e^x\le 1+bx\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\le\dfrac{e^x-1}{x}\le b\Leftrightarrow a\le f(x)\le b$. Deoarece f este strict crescătoare pe $(0,\ 1]$, iar $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ şi $f(1)=e-1$, rezultă că $1<f(x)\le e-1$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1]$. Drept urmare, cerința ca $a\le f(x)\le b$ (oricare ar fi $x\in(0,\ 1]$) este îndeplinită dacă $a\le 1$ şi $b\ge e-1$.

79. ***Fie*** $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$ ***o funcție continuă pe*** $[0,\ \infty)$ ***şi de două ori derivabilă pe*** $(0,\ \infty)$**.** ***Arătați că, dacă*** $f(0)=0$ ***şi*** $f''(x)\ge 0$**,** ***oricare ar fi*** $x\in(0,\ \infty)$**,** ***atunci funcția*** $g:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ ***este crescătoare pe*** $(0,\ \infty)$**.**

Soluție: Evident, funcția g este derivabilă pe $(0,\ \infty)$ şi $g'(x)=\dfrac{1}{x}\left(f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)\right)$. Problema este rezolvată dacă arătăm că $g'(x)\ge 0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$. Fie $x>0$. Întrucât f este continuă pe intervalul $[0,\ x]$ şi derivabilă pe $(0,\ x)$ (conform teoremei lui Lagrange) există $c\in(0,\ x)$ astfel încât $f(x)-f(0)=xf'(c)$, de unde $f(x)=xf'(c)$ (căci $f(0)=0$). Drept urmare, $g'(x)=\dfrac{1}{x}\left(f'(x)-f'(c)\right)$. Cum

funcția f' este crescătoare pe $(0,\ \infty)$ (fiindcă $f''(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$) și $x>c$, rezultă că $f'(x)\geq f'(c)$ și, deci, $g'(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

80. ***Determinați*** $a\in(0,\ \infty)$***, astfel încât*** $a^x\geq 2^{x+1}-1$***, oricare ar fi*** $x\in\boldsymbol{R}$**.**

Soluție: Să considerăm funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=a^x-2^{x+1}+1$. Deoarece $f(x)\geq 0$ (căci $a^x\geq 2^{x+1}-1$), iar $f(0)=0$, rezultă că $f(x)\geq f(0)$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, ceea ce arată că $x=0$ este punct de minim al lui f. Având în vedere că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, conform teoremei lui Fermat, deducem că $f'(0)=0$. Cum $f'(x)=a^x\ln a-2^{x+1}\ln 2$, condiția $f'(0)=0$ conduce la $\ln a-2\ln 2=0$, de unde $a=4$. Rămâne să verificăm că, pentru $a=4$, $f(x)\geq 0$ (oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$). Dacă $a=4$, atunci $f(x)=4^x-2^{x+1}+1=\left(2^x\right)^2-2\cdot 2^x+1=\left(2^x-1\right)^2\geq 0$ (oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$). Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

81. ***Fie*** $a\in(0,\ \infty)$ ***și funcția*** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$**,** $f(x)=x\ln a-a\ln x$**. Determinați valoarea lui** a ***pentru care*** $f(x)\geq 0$**, oricare ar fi** $x\in(0,\ \infty)$**.**

Soluție: Deoarece $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$ și $f(a)=0$, rezultă că $x=a$ este punct de minim al lui f. Remarcând și faptul că a este situat în intervalul $(0,\ \infty)$, deducem că $f'(a)=0$ (din teorema lui Fermat). Cum $f'(a)=\ln a-1$ (căci $f'(x)=\ln a-\frac{a}{x}$), rezultă că $\ln a-1=0$, de unde $a=e$. Rămâne să verificăm că, pentru $a=e$, $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$. Dacă $a=e$, atunci $f(x)=x-e\ln x$, iar $f'(x)=\frac{x-e}{x}$. Evident, $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(x-e)$, ceea ce arată că f este strict descrescătoare pe $(0,\ e]$ și strict crescătoare pe $[e,\ \infty)$, iar $x=e$ este punct de minim al lui f. Rezultă că $f(x)\geq f(e)=0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$.

82. ***Se consideră funcția derivabilă*** $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$**. Arătați că, dacă** $f'(x)\geq 0$**, oricare ar fi** $x\in[0,\ \infty)$**,** $f(0)=0$ ***și*** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$**, atunci** $f(x)=0$**, oricare ar fi** $x\in[0,\ \infty)$**.**

Soluție: Fie x_0 un element oarecare din intervalul $[0,\ \infty)$ și $x>x_0$. Întrucât f este derivabilă pe $[x_0,\ x]$, conform teoremei lui Lagrange, există $c\in(x_0,\ x)$ astfel încât $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$. Având în vedere că $f'(c)(x-x_0)\geq 0$ (căci $f'(c)\geq 0$ și $x-x_0>0$), rezultă că $f(x)\geq f(x_0)$, de unde $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\geq$ $\geq\lim\limits_{x\to\infty}f(x_0)=f(x_0)$, ceea ce conduce la $0\geq f(x_0)$ (fiindcă $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$). Remarcând că f este crescătoare pe $[0,\ \infty)$ (fiindcă $f'(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in[0,\ \infty)$), iar $x_0\geq 0$, deducem că $f(x_0)\geq f(0)=0$. Cum $f(x_0)\leq 0$ și $f(x_0)\geq 0$, rezultă că $f(x_0)=0$ și, cum x_0 este oarecare în $[0,\ \infty)$, conchidem că $f(x)=0$, oricare ar fi $x\in[0,\ \infty)$.

83. ***Arătați că funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$**,** $f(x)=\begin{cases}e^x+2x & ,\ x\in(-\infty,\ 0)\\ 3\ln(x+1)+1 & ,\ x\in[0,\ \infty)\end{cases}$ ***este inversabilă***.

Soluție: Se arată cu ușurință că f este continuă pe $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(e^x+2x)=1$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(3\ln(x+1)+1\right)=1$ și $f(0)=1$, rezultă că f este continuă și în $x=0$. Deci, f este continuă pe $\boldsymbol{R}$. Remarcând și faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+2x)=-\infty$, iar $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(3\ln(x+1)+1\right)=\infty$, deducem că $\operatorname{Im} f=\boldsymbol{R}$. Deci, f este surjectivă. De asemenea, se arată cu ușurință că f este derivabilă pe

$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$ şi că $f'(x)=\begin{cases} e^x+2 & ,\ x\in(-\infty,\ 0) \\ \dfrac{3}{x+1} & ,\ x\in(0,\ \infty) \end{cases}$. Având în vedere faptul că f este continuă în $x=0$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (e^x+2)=3$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{3}{x+1}=3$, deducem că f este derivabilă în $x=0$ şi $f'(0)=3$. Prin urmare, f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$. Cum $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe $\boldsymbol{R}$, ceea ce arată că f este injectivă. Ca urmare a celor stabilite anterior, f este bijectivă şi, deci, inversabilă.

84. ***Se consideră funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^3-x^2+x+2$.

a) ***Arătaţi că*** f ***este inversabilă.*** **b)** ***Fie*** $g=f^{-1}$. ***Calculaţi*** $g'(3)$.

Soluţie: a) Deoarece $f'(x)=3x^2-2x+1=2x^2+(x-1)^2>0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, rezultă că f este strict crescătoare, ceea ce arată că f este injectivă. Ţinând seama de faptul că f este continuă, iar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, deducem că $\operatorname{Im} f=\boldsymbol{R}$, ceea ce confirmă că f este surjectivă. Deci, f este bijectivă. Rezultă că f este inversabilă.

b) Fie $g(3)=x_0$. Atunci, $f(x_0)=3$. Remarcând şi faptul că $f(1)=3$, deducem că $f(x_0)=f(1)$, de unde $x_0=1$ (căci f este injectivă). Rezultă că $g'(3)=\dfrac{1}{f'(1)}$ (s-a avut în vedere că, dacă $f(x_0)=y_0$ şi $f'(x_0)\neq 0$, atunci $g'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$), ceea ce, împreună cu $f'(1)=2$, conduce la $g'(3)=\dfrac{1}{2}$.

85. ***Se consideră funcţia*** $f:[-1,\ 2]\to[-9,\ 18]$, $f(x)=2x^3-3x^2-12x+11$.

a) ***Arătaţi că*** f ***este inversabilă.*** **b)** ***Fie*** $g=f^{-1}$. ***Calculaţi*** $g'(-2)$.

Soluţie: a) Evident, $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)$. Cum rădăcinile ecuaţiei $x^2-x-2=0$ sunt -1 şi 2, rezultă că $f'(x)=0$ dacă şi numai dacă $x=-1$ sau $x=2$. Totodată, $f'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(-1,\ 2)$. Deci, f este strict descrescătoare pe $(-1,\ 2)$. Remarcând şi faptul că f este continuă pe $[-1,\ 2]$, deducem că f este strict descrescătoare pe $[-1,\ 2]$, ceea ce arată că f este injectivă. Ţinând seama de faptul că f este continuă pe $[-1,\ 2]$, iar $f(-1)=18$ şi $f(2)=-9$, deducem că $\operatorname{Im} f=[-9,\ 18]$, ceea ce confirmă că f este surjectivă. Ca urmare a celor stabilite anterior, funcţia f este bijectivă şi, deci, inversabilă.

b) Fie $g(-2)=x_0$. Atunci, $f(x_0)=-2$. Evidenţiind şi faptul că $f(1)=-2$, deducem că $f(x_0)=f(1)$, de unde $x_0=1$. Rezultă că $g'(-2)=\dfrac{1}{f'(1)}$, ceea ce, împreună cu $f'(1)=-12$, conduce la $g'(-2)=-\dfrac{1}{12}$.

86. ***Se consideră funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^3+\sin x$.

a) ***Arătaţi că*** f ***este inversabilă.*** **b)** ***Fie*** $g=f^{-1}$. ***Calculaţi*** $g'(\pi^3)$.

Soluţie: a) Evident, f este derivabilă şi $f'(x)=3x^2+\cos x$. Dacă $x\in[-1,\ 1]$, atunci $3x^2\geq 0$, iar $\cos x>0$, ceea ce implică $f'(x)>0$. Dacă $x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)$, atunci $3x^2>3$, iar $\cos x\geq -1$, de unde $f'(x)>0$. Deci, $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Rezultă că funcţia f este strict crescătoare pe $\boldsymbol{R}$, ceea ce arată că f este injectivă. Cum $f(x)\leq 1+x^3$ (căci $\sin x\leq 1$), oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, iar $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x^3)=-\infty$, rezultă că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Având în vedere că $f(x)\geq x^3-1$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, iar $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-1)=+\infty$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Evidenţiind şi faptul că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, conchidem că $\operatorname{Im} f=\boldsymbol{R}$. Rezultă că f este surjectivă. Deci, funcţia f este bijectivă şi, deci, inversabilă.

b) Fie $g(\pi^3)=x_0$. Atunci, $f(x_0)=\pi^3$. Remarcând şi faptul că $f(\pi)=\pi^3$, deducem că

$f(x_0)=f(\pi)$, de unde $x_0=\pi$. Rezultă că $g'(\pi^3)=\dfrac{1}{f'(\pi)}$, ceea ce, împreună cu $f'(\pi)=3\pi^2-1$, conduce la $g'(\pi^3)=\dfrac{1}{3\pi^2-1}$.

87. Arătați că:

a) $\ln x<\dfrac{1}{ex}$**, oricare ar fi** $x\in(0,\ 1]$**;** **b)** $\operatorname{tg}x>x+\dfrac{x^3}{3}$**, oricare ar fi** $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$**;**

c) $\dfrac{x}{1+x^2}<\operatorname{arctg}x$**, oricare ar fi** $x\in(0,\ \infty)$**.**

Soluție: a) Să considerăm funcția $f:(0,\ 1]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{ex}$. Cum $f'(x)=\dfrac{ex+1}{ex^2}>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1]$, rezultă că f este strict crescătoare pe $(0,\ 1]$, ceea ce implică $f(x)\le f(1)$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1]$. Având în vedere și faptul că $f(1)=-\dfrac{1}{e}<0$, deducem că $\ln x-\dfrac{1}{ex}<0$, de unde $\ln x<\dfrac{1}{ex}$ (oricare ar fi $x\in(0,\ 1]$).

b) Să considerăm funcția $f:\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x-x-\dfrac{x^3}{3}$. Deoarece $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1-x^2=$ $=\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}-x^2=\operatorname{tg}^2 x-x^2>0$, oricare ar fi $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ (căci $0<x<\operatorname{tg}x$, oricare ar fi $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$), rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, de unde $f(x)>f(0)$ (căci f este continuă pe $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$) ceea ce conduce la $f(x)>0$, oricare ar fi $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Astfel, inegalitatea din enunț este demonstrată.

c) Fie funcția $f:[0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-\dfrac{x}{1+x^2}$. Evident, f este derivabilă pe $[0,\ \infty)$, iar $f'(x)=\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$. Deci, $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$, ceea ce arată că f este strict crescătoare pe $(0,\ \infty)$. Având în vedere și faptul că f este continuă pe $[0,\ \infty)$, deducem că $f(x)>f(0)$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$. Cum $f(0)=0$, rezultă că $f(x)>0$, de unde $\operatorname{arctg}x>\dfrac{x}{1+x^2}$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$.

88. ***Arătați că*** $e^x\ge 1+\ln(x+1)$**,** ***oricare ar fi*** $x\in(-1,\ \infty)$**.**

Soluție: Să considerăm funcția $f:(-1,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=e^x-\ln(x+1)-1$. Evident, f este derivabilă, iar $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$. Dacă $x\in(-1,\ 0)$, atunci $0<x+1<1$, ceea ce conduce la $\dfrac{1}{x+1}>1$. Remarcând și faptul că $e^x<1$, deducem că $f'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(-1,\ 0)$. Fie $x\in(0,\ \infty)$. În acest caz, $x+1>1$, de unde $\dfrac{1}{x+1}<1$. Având în vedere că $e^x>1$, deducem că $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$. Ținând seama de cele stabilite anterior și de faptul că f este continuă pe $(-1,\ \infty)$, conchidem că f este strict descrescătoare pe $(-1,\ 0]$ și strict crescătoare pe $[0,\ \infty)$, iar $x=0$ este punct de minim al lui *f*. Rezultă că $f(x)\ge f(0)$, oricare ar fi $x\in(-1,\ \infty)$, de unde $f(x)\ge 0$, oricare ar fi $x\in(-1,\ \infty)$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

89. ***Arătați că*** $(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x}$ ***, oricare ar fi*** $x \in (0,\ e)$ **.**

Soluție: Deoarece $e+x>0$ şi $e-x>0$ (căci $0<x<e$), inegalitatea din enunț este echivalentă cu $(e-x)\ln(e+x) > (e+x)\ln(e-x)$ (oricare ar fi $x \in (0,\ e)$). Să considerăm funcția $f:[0,\ e) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = (e-x)\ln(e+x) - (e+x)\ln(e-x)$. Se arată cu uşurință că f este de două ori derivabilă pe $[0,\ e)$, iar $f'(x) = \dfrac{2(e^2+x^2)}{e^2-x^2} - \ln(e+x) - \ln(e-x)$ şi $f''(x) = \dfrac{2x(5e^2-x^2)}{\left(e^2-x^2\right)^2}$. Având în vedere că $f''(x)>0$, oricare ar fi $x \in (0,\ e)$, deducem că funcția f' este strict crescătoare pe $(0,\ e)$, ceea ce, împreună cu f' continuă pe $[0,\ e)$ şi $f'(0)=0$, conduce la $f'(x)>0$, oricare ar fi $x \in (0,\ e)$. Drept urmare, funcția f este strict crescătoare pe $[0,\ e)$. Cum $f(0)=0$, conchidem că $f(x)>0$, oricare ar fi $x \in (0,\ e)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, cerința enunțului a fost îndeplinită.

90. ***Arătați că*** $\dfrac{x^2}{1+x^2} < \ln(1+x^2) < x \operatorname{arctg} x$ ***, oricare ar fi*** $x \in (0,\ \infty)$ **.**

Soluție: Pentru rezolvarea problemei, considerăm funcțiile $f,\ g:[0,\ \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \ln(1+x^2) - \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $g(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$. Deoarece funcția f este derivabilă pe $[0,\ \infty)$ şi $f'(x) = \dfrac{2x^3}{(1+x^2)^2} > 0$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$, rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $(0,\ \infty)$. Evidențiind şi faptul că f este continuă pe $[0,\ \infty)$, deducem că $f(x) > f(0) = 0$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$. Deci, $\ln(1+x^2) > \dfrac{x^2}{1+x^2}$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$. Evident, funcția g este de două ori derivabilă pe $[0,\ \infty)$. Remarcăm şi faptul că $g'(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{1+x^2}$, iar $g''(x) = \dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$. Întrucât $g''(x)>0$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$, rezultă că funcția g' este strict crescătoare pe $(0,\ \infty)$. Evidențiind şi faptul că g' este continuă pe $[0,\ \infty)$, deducem că $g'(x) > g'(0)$, de unde $g'(x)>0$ (oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$). Prin urmare, funcția g este strict crescătoare pe $(0,\ \infty)$. Ținând seama şi de faptul că g este continuă pe $[0,\ \infty)$, conchidem că $g(x) > g(0)$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$, de unde $g(x)>0$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$. Drept urmare, $\ln(1+x^2) < x \operatorname{arctg} x$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$.

91. a) ***Arătați că, oricare ar fi*** $n \in \boldsymbol{N},\ n \geq 3$ ***, ecuația*** $x^n + \ln x = 0$ ***are o rădăcină reală şi numai una, iar aceasta este situată în intervalul*** $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$**.**

b) ***Fie*** x_n ***rădăcina menționată la a). Calculați*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ **.**

Soluție: a) Evident, este necesar ca $x>0$. Să considerăm funcția $f:(0,\ \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^n + \ln x$. Remarcăm faptul că f este derivabilă şi că $f'(x) = \dfrac{nx^n+1}{x}$. Deoarece $f'(x)>0$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$, rezultă că f este strict crescătoare pe $(0,\ \infty)$. Având în vedere şi faptul că $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2^n} - \ln 2 < 0$ (căci $\dfrac{1}{2^n} - \ln 2 \leq \dfrac{1}{2} - \ln 2 = \ln\dfrac{\sqrt{e}}{2} < 0$), iar $f(1) = 1 > 0$, deducem că ecuația $f(x)=0$ are o singură rădăcină, iar aceasta este situată în intervalul $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$.

b) Întrucât $f\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = \dfrac{1}{n}(1-\ln n) = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{e}{n} < 0$ (fiindcă $n \geq 3$ implică $n > e$), $f(x_n) = 0$, $f(1) = 1 > 0$,

iar f este strict crescătoare pe $(0,\ \infty)$, rezultă că $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < x_n < 1$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$ şi $n \geq 3$. Evidenţiind şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

92. ***Se consideră şirul*** $(a_n)_{n\geq 0}$ ***având termenul general*** $a_n = \pi n - 2n \operatorname{arctg} n$. ***Arătaţi că acest şir este convergent şi, apoi, calculaţi*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Soluţie: Să considerăm funcţia $f:[0,\ \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \pi x - 2x \operatorname{arctg} x$. Se arată cu uşurinţă că f este derivabilă pe $[0,\ \infty)$, iar $f'(x) = \pi - 2\operatorname{arctg} x - \frac{2x}{1+x^2}$ şi $f''(x) = -\frac{4}{\left(1+x^2\right)^2}$. Deoarece $f''(x) < 0$, oricare ar fi $x \in [0,\ \infty)$, rezultă că f' este strict descrescătoare pe $[0,\ \infty)$. Remarcând şi faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$, deducem că $f'(x) > 0$, oricare ar fi $x \in [0,\ \infty)$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $[0,\ \infty)$. Evidenţiind şi faptul că f este continuă pe $[0,\ \infty)$, iar $f(0) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 2 \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 2$, conchidem că $\operatorname{Im} f = [0,\ 2)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, funcţia f este strict crescătoare şi mărginită, ceea ce arată că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător şi mărginit (căci $a_n = f(n)$). Drept urmare, şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 2$ şi, deci, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

93. ***Se consideră funcţia*** $f:[0,\ 1] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \ln\frac{1}{x} + (1-x)\ln\frac{1}{1-x}, & x \in (0,\ 1) \\ 0, & x \in \{0,\ 1\} \end{cases}$.

a) ***Arătaţi că*** f ***este continuă pe*** $[0,\ 1]$.

b) ***Studiaţi monotonia funcţiei*** f.

c) ***Demonstraţi că, oricare ar fi*** $a,\ b \in (0,\ 1)$ ***şi*** $a + b = 1$, ***are loc inegalitatea*** $a \ln\frac{1}{a} + b \ln\frac{1}{b} \leq \ln 2$.

Soluţie: **a)** Evident, f este continuă pe $(0,\ 1)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \left(x \ln\frac{1}{x} + (1-x)\ln\frac{1}{1-x} \right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \left[(x-1)\ln(1-x) - x\ln x \right] = 0$ (căci $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x\ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} =$

$= -\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x = 0$), iar $f(0) = 0$, rezultă că f este continuă în $x = 0$. Analog, arătăm că f este continuă în $x = 1$. Deci, f este continuă pe $[0,\ 1]$.

b) Se observă cu uşurinţă că f este derivabilă pe $(0,\ 1)$. Remarcăm şi faptul că $f'(x) = \left[(x-1)\ln(1-x) - x\ln x \right]' = \ln(1-x) + 1 - \ln x - 1 = \ln\frac{1-x}{x}$. Rezultă că $f'(x) = 0$ dacă şi numai dacă $\frac{1-x}{x} = 1$, de unde $x = \frac{1}{2}$. Evidenţiind şi faptul că f' este continuă pe fiecare dintre intervalele $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ şi $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, iar $f'\left(\frac{1}{e}\right) > 0$ $\left(0 < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}\right)$ şi $f'\left(\frac{e}{3}\right) < 0$ $\left(\frac{1}{2} < \frac{e}{3} < 1\right)$, deducem că $f'(x) > 0$ dacă $x \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, iar $f'(x) < 0$ dacă $x \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$. Drept urmare, f este strict crescătoare pe $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$ şi strict descrescătoare pe

$\left[\frac{1}{2},\ 1\right)$, iar $x=\frac{1}{2}$ este punct de maxim al lui f. Evidențiem și faptul că $f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2$, oricare ar fi $x\in(0,\ 1)$.

c) Fie $a\in(0,\ 1)$. Ținând seama de cele stabilite la punctul b), deducem că $a\ln\frac{1}{a}+(1-a)\ln\frac{1}{1-a}\le\ln 2$. Cum $b=1-a$ (fiindcă $a+b=1$), rezultă că $a\ln\frac{1}{a}+b\ln\frac{1}{b}\le\ln 2$. Având în vedere că $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2$, conchidem că relația anterioară are loc ca egalitate dacă și numai dacă $a=b=\frac{1}{2}$.

94. ***Se consideră funcția*** $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=e^{-x}\sin x$. ***Arătați că abscisele punctelor de maxim local ale lui*** G_f ***sunt în progresie aritmetică, iar ordonatele corespunzătoare sunt în progresie geometrică.***

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că f este de două ori derivabilă pe $(0,\ \infty)$, iar $f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$ și $f''(x)=-2e^{-x}\cos x$. Evident, $f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x-\sin x=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=1\Leftrightarrow x_k=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{N}$ (căci $x>0$). Evidențiem și faptul că x_k este punct de maxim local al lui f numai dacă $f''(x_k)<0$. Cum $f''(x_k)=-2e^{x_k}\cos x_k=-2e^{-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=-\sqrt{2}e^{-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}\cos k\pi=(-1)^{k+1}\sqrt{2}e^{-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$, condiția $f''(x_k)<0$ este îndeplinită dacă și numai dacă $k=2n$ și $n\in\boldsymbol{N}$. Drept urmare, abscisele punctelor de maxim local ale lui G_f sunt numerele $x_{2n}=\frac{\pi}{4}+2n\pi$ $(n\in\boldsymbol{N})$. Se observă cu ușurință că aceste numere sunt în progresie aritmetică având rația 2π. Remarcând faptul că $f(x_{2n})=e^{-x_{2n}}\sin x_{2n}=e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}e^{-2n\pi}$, deducem că ordonatele punctelor de maxim local ale lui G_f sunt în progresie geometrică.

95. ***Determinați intervalele de convexitate (concavitate) și eventualele puncte de inflexiune ale următoarelor funcții*****:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+1$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^4-2x^3-12x^2+3x+1$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$; $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$;

d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\left(x^2+1\right)e^x$;

e) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\ln\left(2x^2+2x+1\right)$;

f) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

Soluție: a) Evident, f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, iar $f''(x)=6(x-1)$. Rezultă că f este concavă pe $(-\infty,\ 1)$ și convexă pe $(1,\ \infty)$, iar $x=1$ este punct de inflexiune al lui f.

b) Remarcăm, mai întâi, că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, și că $f''(x)=12(x^2-x-2)$. Rezultă că $f''(x)=0$ dacă și numai dacă $x=-1$ sau $x=2$, iar $\operatorname{sgn}f''(x)=\operatorname{sgn}(x^2-x-2)$, ceea ce arată că f este convexă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -1)$, $(2,\ +\infty)$, este concavă pe $(-1,\ 2)$, iar $x=-1$ și $x=2$ sunt puncte de inflexiune ale lui f.

c) Se arată cu ușurință că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ și că $f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{\left(x^2+1\right)^3}$. Deci, $-\sqrt{3},\ 0$ și $\sqrt{3}$ sunt zerourile lui $f''(x)$, iar $\operatorname{sgn}f''(x)=\operatorname{sgn}\left(x(x^2-3)\right)$. Rezultă că f este concavă pe $\left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right)$ și pe $\left(0,\ \sqrt{3}\right)$, este convexă pe $\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$ și pe $\left(\sqrt{3},\ \infty\right)$, iar $x=-\sqrt{3},\ x=0$ și $x=\sqrt{3}$ sunt puncte de inflexiune ale lui f.

d) Evidențiem, mai întâi, faptul că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ și că $f''(x)=(x^2+4x+3)e^x$. Rezultă că $f''(x)=0\Leftrightarrow x^2+4x+3=0\Leftrightarrow x\in\{-3,\ -1\}$, iar $\operatorname{sgn}f''(x)=\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)$. Drept urmare, f

este convexă atât pe $(-\infty,\ -3)$, cât şi pe $(-1,\ +\infty)$, este concavă pe $(-3,\ -1)$, iar $x=-3$ şi $x=-1$ sunt puncte de inflexiune ale lui *f*.

e) Remarcăm, mai întâi, că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ şi că $f''(x)=\dfrac{-8(x^2+x)}{\left(2x^2+2x+1\right)^2}$. Rezultă că $f''(x)=0\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow x\in\{-1,\ 0\}$ şi că $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}\left(-(x^2+x)\right)$. Prin urmare, f este concavă pe $(-\infty,\ -1)$ şi pe $(0,\ +\infty)$, este convexă pe $(-1,\ 0)$, iar $x=-1$ şi $x=0$ sunt puncte de inflexiune ale lui *f*.

f) Se arată cu uşurinţă că f este de două ori derivabilă pe $(0,\ \infty)$ şi, că $f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$. Prin urmare, $f''(x)=0\Leftrightarrow 2\ln x-3=0\Leftrightarrow x=e\sqrt{e}$, iar $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}(2\ln x-3)$. Să considerăm funcţia $g:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=2\ln x-3$. Deoarece g este continuă pe $(0,\ \infty)$, $x=e\sqrt{e}$ este singurul zerou al lui g, iar $g(e)=-1<0$ şi $g(e^2)=1>0$, rezultă că $g(x)<0$ dacă $x\in\left(0,\ e\sqrt{e}\right)$ şi $g(x)>0$ dacă $x\in\left(e\sqrt{e},\ \infty\right)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, f este concavă pe $\left(0,\ e\sqrt{e}\right)$ şi convexă pe $\left(e\sqrt{e},\ \infty\right)$, iar $x=e\sqrt{e}$ este punct de inflexiune al lui *f*.

96. ***Determinaţi intervalele de convexitate (concavitate) şi eventualele puncte de inflexiune ale următoarelor funcţii*:**

a) $f:[0,\ 2\pi]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\sin x+\cos x$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$; $f(x)=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+8}}$; **d)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$; **e)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$.

Soluţie: a) Remarcăm, mai întâi, că f este de două ori derivabilă pe $[0,\ 2\pi]$ şi că $f''(x)=-(\sin x+\cos x)$. Rezultă că $f''(x)=0\Leftrightarrow\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=-1\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}\right\}$ (căci $x\in[0,\ 2\pi]$), iar $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}\left(-(\sin x+\cos x)\right)$. Remarcând că f'' este continuă pe $[0,\ 2\pi]$ şi că $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1<0,\quad f''(\pi)=1>0,\quad f''(2\pi)=-1<0\quad\left(\dfrac{\pi}{2}\in\left[0,\ \dfrac{3\pi}{4}\right),\quad \pi\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}\right),\quad 2\pi\in\left(\dfrac{7\pi}{4},\ 2\pi\right]\right)$, deducem că $f''(x)<0$ dacă $x\in\left[0,\ \dfrac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{7\pi}{4},\ 2\pi\right]$ şi $f''(x)>0$ dacă $x\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$. Rezultă că f este convexă pe $\left(\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$, este concavă pe fiecare dintre intervalele $\left[0,\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$ şi $\left(\dfrac{7\pi}{4},\ 2\pi\right]$, iar $x=\dfrac{3\pi}{4}$ şi $x=\dfrac{7\pi}{4}$ sunt puncte de inflexiune ale lui *f*.

b) Evident, f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$, iar $f''(x)=\dfrac{-2(2x+1)}{\left(2x^2+2x+1\right)^2}$. Cum $f''(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$, iar $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}\left(-(2x+1)\right)$, rezultă că f este convexă pe $(-\infty,\ -1)$ şi pe $\left(-1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$, este concavă pe $\left(-\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$, iar $x=-\dfrac{1}{2}$ este punct de inflexiune al lui *f*.

c) Arătăm, mai întâi, că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ şi că $f'(x)=\dfrac{4(2-x)}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}$, iar $f''(x)=\dfrac{8(x^2-3x-4)}{(x^2+8)^2\sqrt{x^2+8}}$. Rezultă că $f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-3x-4=0\Leftrightarrow x\in\{-1,\ 4\}$, iar $\operatorname{sgn} f''(x)=$

$= \operatorname{sgn}(x^2 - 3x - 4)$. Drept urmare, f este convexă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -1)$ şi $(4,\ +\infty)$, este concavă pe $(-1,\ 4)$, iar $x = -1$ şi $x = 4$ sunt puncte de inflexiune ale lui f.

d) Pentru început, evidenţiem faptul că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R} \setminus \{1\}$, iar $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ şi $f''(x) = -\dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{1}{(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. Remarcăm, totodată, că f are derivată în $x = 1$, iar $\operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(x-1)$. Rezultă că f este convexă pe $(-\infty,\ 1)$, este concavă pe $(1,\ +\infty)$, iar $x = 1$ este punct de inflexiune al lui f.

e) Remarcăm, mai întâi, că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R} \setminus \{-1,\ 0\}$, iar $f'(x) = \dfrac{3x+2}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}$ şi $f''(x) = -\dfrac{2}{9(x+1)\sqrt[3]{x^4(x+1)^2}}$. Scoatem în evidenţă şi faptul că f are derivată în $x = -1$, dar nu are derivată în $x = 0$ şi că $\operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(-(x+1))$. Drept urmare, f este convexă pe $(-\infty,\ -1)$, este concavă atât pe $(-1,\ 0)$, cât şi pe $(0,\ +\infty)$, iar $x = -1$ este punct de inflexiune al lui f.

97. ***Fie*** $m \in \boldsymbol{R}$ ***şi funcţia*** $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + mx + 2}$.

a) ***Determinaţi valorile lui*** m, ***astfel încât*** f ***să fie derivabilă pe*** $\boldsymbol{R}$.

b) ***Pentru valorile lui*** m ***astfel determinate, arătaţi că*** f ***are două puncte de inflexiune.***

Soluţie: a) Funcţia f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ dacă $2x^2 + mx + 2 \neq 0$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{R}$. Această cerinţă este îndeplinită când discriminantul ecuaţiei $2x^2 + mx + 2 = 0$ este negativ. Cum $\Delta = m^2 - 16$, rezultă că $m^2 - 16 < 0$, de unde $m \in (-4,\ 4)$.

b) Pentru $m \in (-4,\ 4)$, funcţia f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, iar $f'(x) = \dfrac{4x+m}{3\sqrt[3]{(2x^2+mx+2)^2}}$ şi $f''(x) = -\dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{12x^2 + 6mx + m^2 - 4}{(2x^2+mx+2)^2\sqrt[3]{(2x^2+mx+2)^2}}$. Evident, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 6mx + m^2 - 4 = 0$. Fie Δ' discriminantul ultimei ecuaţii. Întrucât $\Delta' = 3(16 - m^2)$, iar $m \in (-4,\ 4)$, rezultă că $\Delta' > 0$, ceea ce arată că ecuaţia menţionată are rădăcini reale şi distincte ; fie $x_1,\ x_2\ (x_1 < x_2)$ aceste rădăcini. Remarcând şi faptul că, în cazul considerat, $2x^2 + mx + 2 > 0$, oricare ar fi $x \in \boldsymbol{R}$, deducem că $\operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(-(12x^2 + 6mx + m^2 - 4))$. Drept urmare, f este convexă pe $(x_1,\ x_2)$ şi concavă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ x_1)$ şi $(x_2,\ \infty)$, iar $x = x_1$ şi $x = x_2$ sunt puncte de inflexiune ale lui f. Astfel, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

98. ***Se consideră funcţia*** $f : (0,\ \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x \ln x$.

a) ***Demonstraţi că funcţia*** f ***este convexă pe*** $(0,\ \infty)$.

b) ***Arătaţi că*** $(a+b)\ln\dfrac{a+b}{2} \leq a\ln a + b\ln b$, ***oricare ar fi*** $a,\ b \in (0,\ \infty)$.

Soluţie: a) Evident, f este de două ori derivabilă pe $(0,\ \infty)$ **şi** $f''(x) = \dfrac{1}{x}$. Rezultă că $f''(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$, ceea ce arată că f este convexă pe $(0,\ \infty)$.

b) Deoarece f este convexă pe $(0,\ \infty)$, rezultă că $f\left((1-t)x_1 + t\,x_2\right) \leq (1-t)f(x_1) + t\,f(x_2)$, oricare ar fi $x_1,\ x_2 \in (0,\ \infty)$ şi oricare ar fi $t \in [0,\ 1]$. Luând $x_1 = a,\ x_2 = b$ şi $t = \dfrac{1}{2}$, obţinem $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq \dfrac{1}{2}f(a) + \dfrac{1}{2}f(b)$, ceea ce conduce la $(a+b)\ln\dfrac{a+b}{2} \leq a\ln a + b\ln b$.

99. ***Se consideră funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-x+1}$.

a) ***Arătați că funcția*** f ***are trei puncte de inflexiune.***

b) ***Fie*** $a,\ b,\ c$ ***cele trei puncte de inflexiune ale funcției*** f. ***Demonstrați că*** $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=6$ ***și că*** $a^3+b^3+c^3=24$.

Soluție: a) Remarcăm, mai întâi, că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ și că $f''(x)=\dfrac{2(x^3-3x^2+1)}{\left(x^2-x+1\right)^2}$.

Evident, $f''(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+1=0$, iar $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}\left(x^3-3x^2+1\right)$. Să considerăm funcția $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=x^3-3x^2+1$. Deoarece $g'(x)=3x^2-6x$, rezultă că $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=2$. Ținând seama de faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty,\ g(0)=1>0,\ g(2)=-3<0,\ \lim\limits_{x\to\infty}g(x)=+\infty$, deducem că ecuația $g(x)=0$ are trei rădăcini reale, iar acestea sunt situate în intervalele $(-\infty,\ 0),\ (0,\ 2)$, respectiv $(2,\ \infty)$; fie $x_1,\ x_2,\ x_3$ $\left(x_1<x_2<x_3\right)$ aceste rădăcini. Atunci, $g(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Se arată cu ușurință că $g(x)<0$ dacă $x\in(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ x_3)$ și că $g(x)>0$ dacă $x\in(x_1,\ x_2)\cup(x_3,\ +\infty)$. Ținând seama de cele stabilite anterior, conchidem că f este concavă pe intervalele $(-\infty,\ x_1)$ și $(x_2,\ x_3)$, este convexă pe intervalele $(x_1,\ x_2)$ și $(x_3,\ +\infty)$, iar $x=x_1,\ x=x_2$ și $x=x_3$ sunt puncte de inflexiune ale lui f. Astfel, cerința de la a) a fost îndeplinită.

b) Evident, putem considera că $a=x_1,\ b=x_2$ și $c=x_3$. Cum $a,\ b$ și c sunt rădăcini ale ecuației $x^3-3x^2+1=0$, rezultă că $a+b+c=3,\ ab+bc+ca=0$ și $abc=-1$. Remarcând și faptul că $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(abc)^2}=\dfrac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{(abc)^2}$, deducem că $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=6$. Întrucât $a^3-3a^2+1=0,\ b^3-3b^2+1=0$ și $c^3-3c^2+1=0$ (căci $a,\ b$ și c sunt rădăcini ale ecuației $x^3-3x^2+1=0$), rezultă că $a^3+b^3+c^3-3(a^2+b^2+c^2)+3=0$ ceea ce conduce la $a^3+b^3+c^3=$ $=3\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\right]-3$, de unde $a^3+b^3+c^3=24$.

100. ***Arătați că graficul funcției*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ ***are trei puncte de inflexiune, iar acestea sunt coliniare.***

Soluție: Remarcăm, mai întâi, că funcția f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ și că $f''(x)=\dfrac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Evident, $f''(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+4x+1)=0\ \Leftrightarrow x=1$ sau $x^2+4x+1=0\ \Leftrightarrow x=1$ sau $x=-2\pm\sqrt{3}$. Evidențiem și faptul că $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}\left((x-1)(x^2+4x+1)\right)$. Cum $(x-1)(x^2+4x+1)<0$ dacă $x\in\left(-\infty,\ -2-\sqrt{3}\right)\cup\left(-2+\sqrt{3},\ 1\right)$, iar $(x-1)(x^2+4x+1)>0$ dacă $x\in\left(-2-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3}\right)\cup(1,\ \infty)$, rezultă că f este concavă pe fiecare dintre intervalele $\left(-\infty,\ -2-\sqrt{3}\right)$ și $\left(-2+\sqrt{3},\ 1\right)$, iar f este convexă pe fiecare dintre intervalele $\left(-2-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3}\right)$ și $(1,\ \infty)$. Totodată, $x=-2-\sqrt{3},\ x=-2+\sqrt{3}$ și $x=1$ sunt puncte de inflexiune ale lui f. Având în vedere că $f\left(-2-\sqrt{3}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4},\ f\left(-2+\sqrt{3}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ și $f(1)=1$, deducem că punctele de inflexiune ale lui G_f sunt $A\left(-2-\sqrt{3},\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right),\ B\left(-2+\sqrt{3},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$ și

$C(1,\ 1)$. Remarcând faptul că $\begin{vmatrix} -2-\sqrt{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{4} & 1 \\ -2+\sqrt{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\sqrt{3} & \frac{-3-\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -3+\sqrt{3} & \frac{-3+\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, conchidem că punctele $A,\ B$ şi C sunt coliniare.

Probleme propuse

1. Arătaţi că $x=0$ este punct de minim local al funcţiei $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2\cos x$.

2. Se consideră funcţia $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=|x-1|$. Arătaţi că $x=1$ este punct de minim local al lui f, deşi f nu este derivabilă în $x=1$.

3. Se consideră funcţia $f:[0,\ 1]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^x-1$. Arătaţi că $x=0$ este punct de minim al lui f, iar $x=1$ este punct de maxim al lui f, deşi $f'(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in[0,\ 1]$.

4. Se consideră funcţia $f:\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2\operatorname{tg}x$. Arătaţi că, deşi, $f'(0)=0$, totuşi $x=0$ nu este punct de extrem local al lui f.

5. Se consideră funcţia $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^3-3x-2$. Găsiţi un interval pe care f să îndeplinească condiţiile din teorema lui Rolle.

6. Se consideră funcţia $f:[1,\ 3]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2-4x+3$. Arătaţi că f îndeplineşte condiţiile din teorema lui Rolle şi, apoi, determinaţi numărul c care intervine în această teoremă.

7. Arătaţi că funcţia $f:[0,\ 2]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$ îndeplineşte condiţiile din teorema lui Rolle şi, apoi, determinaţi numărul c care intervine în această teoremă.

8. Arătaţi că funcţia $f:[0,\ 1]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt{x^2-x^3}$ îndeplineşte condiţiile din teorema lui Rolle şi, apoi, determinaţi numărul c care intervine în această teoremă.

9. Arătaţi că funcţia $f:[1,\ 2]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sin\frac{2\pi}{x}$ îndeplineşte condiţiile din teorema lui Rolle. Determinaţi, apoi, numărul c care intervine în această teoremă.

10. Fie $n,\ p\in\boldsymbol{N}^*$ şi funcţia $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^{n+p}-x^p+1$. Aplicaţi teorema lui Rolle funcţiei f pe intervalul $[0,\ 1]$.

11. Arătaţi că funcţia $f:[1,\ 2]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\left(x^2-3x+2\right)e^x$ îndeplineşte condiţiile din teorema lui Rolle. Determinaţi, apoi, numărul c care intervine în această teoremă.

12. Arătaţi că funcţia $f:[-2,\ 2]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=|x^2-1|$ nu îndeplineşte toate condiţiile din teorema lui Rolle.

13. Se consideră funcția $f:[0,\ 3]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}1-3x & ,\ x\in[0,\ 1]\\ x^3-3x^2 & ,\ x\in(1,\ 3]\end{cases}$. Arătați că, deși, f nu îndeplinește toate condițiile din teorema lui Rolle, totuși $f'(2)=0$.

14. Arătați că funcția $f:[-1,\ 1]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-2x & ,\ x\in[-1,\ 0]\\ x^3+4x^2-2x & ,\ x\in(0,\ 1]\end{cases}$ îndeplinește condițiile din teorema lui Rolle și, apoi, determinați numărul c care intervine în această teoremă.

15. Determinați $a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f:[-1,\ 1]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}ax^2-3x+1 & ,\ x\in[-1,\ 0]\\ x^2+bx+c & ,\ x\in(0,\ 1]\end{cases}$ să îndeplinească condițiile din teorema lui Rolle.

16. Determinați $a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f:[-1,\ 1]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & ,\ x\in[-1,\ 0)\\ xe^{x-1} & ,\ x\in[0,\ 1]\end{cases}$ să îndeplinească condițiile din teorema lui Rolle.

17. Fie $f:[0,\ 1]\to \boldsymbol{R}$ o funcție Rolle (continuă pe $[0,\ 1]$ și derivabilă pe $(0,\ 1)$). Arătați că, dacă $f(0)=0$, atunci există $c\in(0,\ 1)$ astfel încât $f(c)=(1-c)f'(c)$.

18. Fie $f:[a,\ b]\to \boldsymbol{R}$ o funcție Rolle. Arătați că există $c\in(a,\ b)$ astfel încât
$$f(a)-f(c)=(c-b)f'(c).$$

19. Fie $f,\ g:[a,\ b]\to \boldsymbol{R}$ două funcții Rolle. Arătați că, dacă $g(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in[a,\ b]$, $g'(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in(a,\ b)$ și $\dfrac{f(a)}{g(a)}=\dfrac{f(b)}{g(b)}$, atunci există $c\in(a,\ b)$ astfel încât $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(c)}{g(c)}$.

20. Fie $0<a<b$ și $f:[a,\ b]\to \boldsymbol{R}$ o funcție Rolle. Arătați că, dacă $bf(a)=af(b)$, atunci există $c\in(a,\ b)$ astfel încât $f(c)=cf'(c)$.

21. Fie $n\in \boldsymbol{N}^*$ și funcția derivabilă $f:[0,\ 1]\to \boldsymbol{R}$ cu proprietatea că $f(1)-f(0)=1$. Arătați că există $c\in(0,\ 1)$ astfel încât $f'(c)=nc^{n-1}$.

22. Fie $f,\ g:[a,\ b]\to \boldsymbol{R}$ două funcții derivabile. Arătați că, dacă $f(a)=f(b)=0$, atunci există $c\in(a,\ b)$ astfel încât $f'(c)+f(c)g'(c)=0$.

23. Fie $f,\ g:[a,\ b]\to \boldsymbol{R}$ două funcții de două ori derivabile. Arătați că, dacă $f(a)=f(b)=g(a)=$ $=g(b)=0$, atunci există $c\in(a,\ b)$ astfel încât $f''(c)g(c)+2f'(c)g'(c)+f(c)g''(c)=0$.

24. Fie I un interval și funcțiile derivabile $f,\ g:I\to \boldsymbol{R}$ având fiecare dintre ele cel puțin două rădăcini în I. Arătați că, dacă $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in I$, atunci între două rădăcini ale lui f există cel puțin o rădăcină a lui g și reciproc.

25. Determinați numărul rădăcinilor reale și stabiliți intervalele în care acestea se află, pentru fiecare dintre ecuațiile:

a) $x^3-3x+4=0$; **b)** $3x^4-8x^3-6x^2+24x-10=0$; **c)** $x-2\operatorname{arctg}x=0$; **d)** $e^x-ex-1=0$;

e) $\ln x-x+2=0$; **f)** $x^2=e^x$.

26. Fie $n\in \boldsymbol{N},\ n\geq 3$. Determinați $a,\ b,\ c\in\boldsymbol{R}$ astfel încât polinomul $f=ax^{n+1}+bx^n+cx-n+1$ să admită rădăcina triplă $x=1$.

27. Stabiliți, în funcție de valorile parametrului real m, numărul rădăcinilor reale ale ecuației
$$x^3-3x^2-9x+m=0.$$

28. Stabiliți, în funcție de valorile parametrului real m, numărul rădăcinilor ecuației

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + m = 0 .$$

29. Stabiliți, în funcție de valorile parametrului real m, numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$\ln x - mx = 0 .$$

30. Stabiliți, în funcție de valorile parametrului real m, numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$x - 1 = me^x .$$

31. Stabiliți, în funcție de valorile parametrului real m, numărul rădăcinilor ecuației

$$x \ln x + 2x \operatorname{arctg} x + mx + 2 = 0 .$$

32. Arătați că fiecare dintre funcțiile:

a) $f:[0,\ 2] \to \boldsymbol{R},\ f(x) = x - x^3$; **b)** $f:[1,\ e] \to \boldsymbol{R},\ f(x) = x - \ln x$; **c)** $f:[0,\ 1] \to \boldsymbol{R},\ f(x) = e^x + x$ îndeplinește condițiile teoremei lui Lagrange. Determinați, apoi, numărul c care intervine în această teoremă.

33. Arătați că nici una dintre funcțiile:

a) $f:[-1,\ 2] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = |\, x^3 - x^2 \,|$; **b)** $f:[-1,\ 1] \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 & ,\ x \in [-1,\ 0] \\ \sqrt{x} & ,\ x \in (0,\ 1] \end{cases}$;

c) $f:[0,\ \pi] \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin x & ,\ x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \cos x & ,\ x \in \left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right] \end{cases}$

nu îndeplinește toate condițiile din teorema lui Lagrange.

34. Arătați că funcția $f:[1,\ 2] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ îndeplinește condițiile din teorema lui Lagrange și, apoi, determinați numărul c care intervine în această teoremă.

35. Fie $a \in (0,\ \infty)$ și funcția $f:[0,\ a] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$. Arătați că f îndeplinește condițiile din teorema lui Lagrange. Dacă $c(a)$ este punctul care intervine în teorema lui Lagrange, calculați $\lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ a > 0}} c(a)$ și $\lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ a > 0}} \dfrac{c(a)}{a}$.

36. Arătați că funcția $f:\left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right] \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ îndeplinește condițiile din teorema lui Lagrange și, apoi, determinați numărul c care intervine în această teoremă.

37. Arătați că fiecare dintre funcțiile:

a) $f:[-1,\ 3] \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 & ,\ x \in [-1,\ 0] \\ \sqrt{x+1} & ,\ x \in (0,\ 3] \end{cases}$; **b)** $f:[-1,\ 1] \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} & ,\ x \in [-1,\ 0] \\ \ln(x+1) & ,\ x \in (0,\ 1] \end{cases}$

îndeplinește condițiile din teorema lui Lagrange și, apoi, determinați numărul c care intervine în această teoremă.

38. Arătați că funcția $f:[0,\ 2] \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & ,\ x \in [0,\ 1) \\ 2x^2 - 3x + 2 & ,\ x \in [1,\ 2] \end{cases}$ îndeplinește condițiile din teorema lui Lagrange și, apoi, aflați numărul c care intervine în această teoremă.

39. Determinați $a,\ b\in \boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f:[-2,\ 2]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} ax+1 & ,\ x\in[-2,\ 1) \\ x^2+3x+b & ,\ x\in[1,\ 2] \end{cases}$ să îndeplinească condițiile din teorema lui Lagrange. Pentru $a,\ b$ astfel determinați, aflați numărul c care intervine în această teoremă.

40. Determinați $a,\ b\in \boldsymbol{R}$, astfel încât funcția $f:[-1,\ e-1]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & ,\ x\in[-1,\ 0) \\ \ln(x+1) & ,\ x\in[0,\ e-1] \end{cases}$ să îndeplinească condițiile din teorema lui Lagrange. Pentru $a,\ b$ astfel determinați, aflați numărul c care intervine în această teoremă.

41. Arătați că, dacă $0\le a<b<\dfrac{\pi}{2}$, atunci $\dfrac{b-a}{\cos^2 a}<\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a<\dfrac{b-a}{\cos^2 b}$.

42. Arătați că $|\sin(a+h)-\sin a|\le|h|$, oricare ar fi $a,\ h\in\boldsymbol{R}$.

43. Fie $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} & ,\ x\ne 0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$.

a) Arătați că nu există $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

b) Este f derivabilă în $x=0$?

44. Fie $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} x\cos x & ,\ x<0 \\ 2 & ,\ x=0 \\ \ln(x+1) & ,\ x>0 \end{cases}$. Arătați că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}^*$ și $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=1$. Este f derivabilă în $x=0$?

45. Studiați derivabilitatea următoarelor funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=|x^3-x^2|$;

b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x|x^2-1|-2|x-1|$;

c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & ,\ x\le 1 \\ e^{x-1}-x & ,\ x>1 \end{cases}$;

d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}(x+1) & ,\ x<-1 \\ \dfrac{x+1}{x+2} & ,\ x\ge -1 \end{cases}$.

46. Determinați domeniul de definiție și studiați derivabilitatea funcțiilor următoare:

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$; **b)** $f(x)=|\ln x-1|$; **c)** $f(x)=\arcsin(2x-1)$; **d)** $f(x)=x\sqrt{|x^2-4x|}$.

47. Determinați $a,\ b\in\boldsymbol{R}$, astfel încât funcțiile următoare să fie derivabile pe $\boldsymbol{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases} x^3-x+a & ,\ x<2 \\ bx+1 & ,\ x\ge 2 \end{cases}$; **b)** $f(x)=x|x-a|+|x-b|$; **c)** $f(x)=\begin{cases} ae^{-x} & ,\ x\le 0 \\ \sin 2x+b\cos 3x & ,\ x>0 \end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & ,\ x<2 \\ x^2\sqrt{x+2} & ,\ x\ge 2 \end{cases}$; **e)** $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & ,\ x<0 \\ ax+b & ,\ x\ge 0 \end{cases}$.

48. Considerăm funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax+1}{3x-1} & ,\ x<0 \\ \ln(2x+b) & ,\ x\ge 0 \end{cases}$. Determinați $a,\ b\in\boldsymbol{R}$, astfel încât f să fie derivabile pe $\boldsymbol{R}$. Pentru $a,\ b$ astfel determinați, este f de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$?

49. Determinați polinomul P de grad minim, astfel încât funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} \sin 2x & ,\ x\le 0 \\ P(x) & ,\ x>0 \end{cases}$ să fie de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.

50. Determinați funcția derivabilă $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, știind că $f(x)-f'(x)=0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$ și că $f(0)=1$.

51. Determinați funcția derivabilă $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, știind că $f'(x)=-\sin x+\cos x$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$ și că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

52. Se consideră funcțiile derivabile $f,\ g:\boldsymbol{R}\to(0,\ \infty)$ cu proprietatea că $f(1)=g(1)$ și $f'(x)g^2(x)=g'(x)f^2(x)$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Arătați că $f=g$.

53. Arătați că $\operatorname{arctg}x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

54. Arătați că $2\arcsin\sqrt{x}-\arcsin(2x-1)=\frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x\in[0,\ 1]$.

55. Arătați că $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\arcsin x=\frac{\pi}{4}$, oricare ar fi $x\in(-1,\ 1)$.

56. Arătați că $\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}|x|=\frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

57. Determinați $a,\ b\in\boldsymbol{R}$, astfel încât egalitatea $\arccos(ax)+b\arccos x=\pi$ să aibă loc pentru orice $x\in[-1,\ 1]$.

58. Arătați că $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\begin{cases}-\frac{3\pi}{4}, & x\in(-\infty,\ -1)\\ \frac{\pi}{4}, & x\in(-1,\ +\infty)\end{cases}$.

59. Se consideră funcția $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x}-\operatorname{arctg}(2x-1)$. Arătați că f este constantă pe anumite intervale. Determinați aceste intervale și constantele corespunzătoare.

60. Se consideră funcțiile $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$ și $g:\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. Arătați că aceste funcții diferă printr-o constantă pe anumite intervale. Determinați aceste intervale și constantele corespunzătoare.

61. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+2x)^5-(1+5x)^2}{x^2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)-\ln(1+3x)}{x^2+2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin3x-\cos4x+1}{6x}$; **e)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos3x}{1-\cos x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\arcsin x}$; **g)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\arcsin x-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{x-\operatorname{arctg}x}$; **i)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3\sin x}{1-\cos x^2}$; **j)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos2x}}{x^2}$.

62. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos^3x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+\cos x-e^x}{x^2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{3x^2-1}-e^2}{2x^2-5x+3}$; **d)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2(e^x-1)}{2\sin x-\sin2x}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{6e^x-x^3-3x^2-6x-6}{x\sin x+2\cos x-2}$; **f)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\ln^2(x+1)}{x^3}$.

63. Fie $n\in\boldsymbol{N}$. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{x^{n+1}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{x^n}$.

64. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2-3x+1}{x^3+x^2+x+2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+x+2}{x^3+x^2-1}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\ln x}{x+2\ln x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{e^x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; **g)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln(\sin^2 x)}{\ln(\sin 3x)}$; **h)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln\left[\ln(x+1)\right]}{\ln\left[\ln(2x+1)\right]}$.

65. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3e^{-x}$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$; **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3\ln x$; **d)** $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)-1\right]$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x+1}\sin\dfrac{1}{x}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x}$.

66. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x-x)$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}-x^2)$; **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$; **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{4}{x^4-1}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; **f)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; **g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-x\right]$.

67. Calculați:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\sin x}$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(e^x-1)^{\frac{1}{\ln x}}$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\sin\frac{1}{x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\pi-2\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; **g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]^{\frac{1}{\ln x}}$.

68. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{\ln x}}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$; **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\sin x}$; **h)** $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\left(\operatorname{tg} x\right)^{\sin 2x}$.

69. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1+x^2)^{\ln x}$; **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln ex\right)^{\frac{1}{x^2-x}}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$; **h)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

70. Determinați intervalele de monotonie şi stabiliți eventualele puncte de extrem, pentru următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^3-12x$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2-12x-8$;

c) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$; **d)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$.

71. Determinați intervalele de monotonie şi stabiliți eventualele puncte de extrem, pentru următoarele funcții:

a) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=2\ln x-5\operatorname{arctg} x$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=(x+2)^2e^x$;

c) $f:\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}e^{x^2-x}$; **d)** $f:\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=2x-\operatorname{tg} x$.

72. Se consideră funcția $f:(-\infty,\ 0]\cup[1,\ \infty)\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt{x^2-x}-x$. Studiați monotonia funcției şi determinați eventualele puncte de extrem ale lui f. Stabiliți, apoi, $\operatorname{Im} f$.

73. Determinați intervalele de monotonie şi stabiliți eventualele puncte de extrem, pentru următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{R},\ f(x)=xe^{x+\frac{1}{x}}$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x-2\operatorname{arctg} x$;

c) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=(x^2-4x)\ln x+x^2-2x$.

74. Determinați intervalele de monotonie şi stabiliți eventualele puncte de extrem ale funcției $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ,\ x\in(-\infty,\ 0] \\ x^2e^x & ,\ x\in(0,\ \infty) \end{cases}.$$

75. Determinați valorile lui $m\in\boldsymbol{R}$, pentru care funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^3+3mx^2+12x+m$ este strict monotonă pe $\boldsymbol{R}$.

76. Determinați valorile lui $m\in\boldsymbol{R}^*$, pentru care funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\ln(x^2+1)-mx$ este crescătoare pe $\boldsymbol{R}$.

77. Arătați că, pentru orice $a\in\boldsymbol{R}^*$, funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=ax^3+(a-2)x^2-2x+3$ are două puncte de extrem.

78. Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ şi funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-ax+b}{x^2+1}$. Arătați că, dacă $a\neq 0$, atunci f are două puncte de extrem.

79. Fie $m\in\boldsymbol{R}^*$ şi funcția $f:D\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\ln\left[mx^2+2(m+2)x+9\right]$.

a) Determinați valorile lui m, astfel încât $D=\boldsymbol{R}$.

b) Arătați că, pentru valorile lui m determinate la a), f are totdeauna un punct de minim.

80. Se consideră funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=|x-1|e^{-|x|}$.

a) Determinați intervalele de monotonie ale lui f.

b) Stabiliți eventualele puncte de extrem şi, apoi, determinați $\operatorname{Im} f$.

81. Fie $a\in\boldsymbol{R}^*$, funcția $f:\boldsymbol{R}\setminus\{a\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-a}$. Determinați intervalele de monotonie ale lui f şi stabiliți eventualele puncte de extrem.

82. Fie $m,\ n\in\boldsymbol{N}^*$. Determinați maximul produsului $P=x^my^n$, unde $x,\ y\in\boldsymbol{R}_+$ şi $x+y=1$.

83. Fie $f:\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x}$. Determinați $a,\ b$, astfel încât f să admită două puncte de extrem local, un maxim egal cu -7 şi un minim egal cu 1.

84. Fie $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ şi funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$, . Determinați $a,\ b$, astfel încât $A(2,\ 1)$ să fie punct de extrem local al lui f. Pentru $a,\ b$ astfel determinate, găsiți $\operatorname{Im} f$.

85. Determinați valorile lui $m\in\boldsymbol{R}$ pentru care $me^x\geq x-1$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

86. Determinați $m\in\boldsymbol{R}$, astfel încât $e^x\geq mx+1$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

87. Determinați $a\in(0,\ \infty)$, astfel încât $xa^{x+1}+1\geq 0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

88. Determinați $a\in(0,\ \infty)$, astfel încât $a^x\geq 2^{x+1}-3^x$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$.

89. Se consideră funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=2^x-2^{-x}$. Arătați că f este strict crescătoare pe $\boldsymbol{R}$ și, apoi, rezolvați ecuația $f(x)+f(3x)=f(2x)+f(4x)$.

90. Fie $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x-\ln(x^2+1)$. Arătați că f este strict crescătoare pe $\boldsymbol{R}$. Rezolvați ecuația $f(x)+f(x^3)=f(x^2)+f(x^4)$.

91. Fie $m,\ n\in\boldsymbol{N}^*$. Arătați că, dacă $m>n$, atunci $nx^m-mx^n\geq n-m$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$.

92. Arătați că $-1\leq\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}<1$, pentru orice $x\in[0,\ \infty)$.

93. Arătați că $1\leq\sin x+\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos x\leq\dfrac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

94. Arătați că, oricare ar fi $x\in[0,\ \infty)$, are loc inegalitatea $2\sqrt{e^x}\geq ex$.

95. Arătați că, oricare ar fi $x\in[0,\ \infty)$, are loc inegalitatea $\operatorname{arctg}x\geq x-\dfrac{x^3}{3}$.

96. Arătați că, oricare ar fi $x\in[0,\ \infty)$, are loc inegalitatea $\ln(x+1)\leq\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. Deduceți, apoi, că $2^{\sqrt{2}}<e$.

97. Se consideră funcția $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x-e\ln x$.

a) Studiați monotonia lui f. Deduceți, apoi, că $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$.

b) Fie $a=\pi^e$ și $b=e^\pi$. Arătați că $a<b$.

98. Se consideră funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$. Arătați că f este injectivă, dar nu este surjectivă.

99. Arătați că funcția $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^3+x+1$ este inversabilă. Dacă $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ este inversa funcției f, determinați $g'(-1)$ și $g''(-1)$.

100. Considerăm funcția $f:\boldsymbol{R}\to(0,\ \infty)$, $f(x)=e^{-x}(x^2+1)$. Arătați că f este inversabilă. Calculați $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

101. Fie $a\in\boldsymbol{R}$, $I=[a,\ \infty)$ și funcția $f:I\to J$, $f(x)=x^4-2x^2-1$, $J=f(I)$. Determinați a minim, astfel încât f să fie bijectivă și, apoi, determinați f^{-1}.

102. Determinați intervalele de convexitate (concavitate) și stabiliți eventualele puncte de inflexiune, pentru următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^3-3x+2$;
b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^4-4x^3$;
c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-4x-7$;
d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^5-5x^4$.

103. Determinați intervalele de convexitate (concavitate) și stabiliți eventualele puncte de inflexiune, pentru următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$;
b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2-x+1}$;
c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+x+4}$;
d) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=(2x^2-3x+2)e^x$.

104. Determinați intervalele de convexitate (concavitate) și stabiliți eventualele puncte de inflexiune, pentru următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=e^{\operatorname{arctg}x}$;
b) $f:(0,\ \infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^2\ln x$;
c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x+\ln(x^2+1)$.

105. Determinați intervalele de convexitate (concavitate) și stabiliți eventualele puncte de inflexiune, pentru următoarele funcții:

a) $f:[0,\ \pi]\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\sin x-\frac{1}{4}\sin 2x$; **b)** $f:[-1,\ 1]\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\arcsin x$.

106. Determinați intervalele de convexitate (concavitate) și stabiliți eventualele puncte de inflexiune, pentru următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=xe^{|x|}$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$.

107. Determinați intervalele de convexitate (concavitate) și stabiliți eventualele puncte de inflexiune, pentru următoarele funcții:

a) $f:\boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$.

Răspunsuri

5. $[-1,\ 2]$ **6.** $c=2$ **7.** $c=\frac{3}{2}$ **8.** $c=\frac{2}{3}$ **9.** $c=\frac{4}{3}$ **10.** $c=\sqrt[n]{\frac{p}{n+p}}$ **11.** $c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

14. $c=\frac{\sqrt{22}-4}{3}$ **15.** $a=-5,\ b=-3,\ c=1$ **16.** $a=1+\frac{1}{e},\ b=\frac{1}{e},\ c=0$ **17.** Se folosește funcția auxiliară $g:[0,\ 1]\to \boldsymbol{R},\ g(x)=(x-1)f(x)$ **18.** Se folosește funcția auxiliară $g:[a,\ b]\to \boldsymbol{R}$, $g(x)=\big(f(x)-f(a)\big)(x-b)$ **19.** Se folosește funcția auxiliară $h:[a,\ b]\to \boldsymbol{R},\ h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ **20.** Se folosește funcția auxiliară $g:[a,\ b]\to \boldsymbol{R},\ g(x)=\frac{f(x)}{x}$ **21.** Se folosește funcția auxiliară $g:[0,\ 1]\to \boldsymbol{R}$, $g(x)=f(x)-x^n$ **22.** Se folosește funcția auxiliară $h:[a,\ b]\to \boldsymbol{R},\ h(x)=f(x)e^{g(x)}$ **23.** Se folosește funcția auxiliară $h:[a,\ b]\to \boldsymbol{R},\ h(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ **25. a)** o singură rădăcină reală, $x_1\in(-\infty,\ -1)$; **b)** patru rădăcini reale: $x_1\in(-\infty,\ -1),\ x_2\in(-1,\ 1),\ x_3\in(1,\ 2),\ x_4\in(2,\ \infty)$; **c)** trei rădăcini reale: $x_1\in(-\infty,\ -1),\ x_2=0,\ x_3\in(1,\ \infty)$; **d)** două rădăcini reale: $x_1=0,\ x_2\in(1,\ \infty)$; **e)** două rădăcini reale: $x_1\in(0,\ 1),\ x_2\in(1,\ \infty)$; **f)** o rădăcină reală $x_1\in(-\infty,\ 0)$ **26.** $a=n-1,\ b=-n-1,$ $c=n+1$ **27.** Dacă $m\in(-\infty,\ -5)$, ecuația are o rădăcină reală $x_1\in(3,\ \infty)$; dacă $m=-5$, ecuația are trei rădăcini reale: $x_1=x_2=-1,\ x_3=5$; dacă $m\in(-5,\ 27)$, ecuația are trei rădăcini reale: $x_1\in(-\infty,\ -1),$ $x_2\in(-1,\ 3),\ x_3\in(3,\ \infty)$; dacă $m=27$, ecuația are trei rădăcini reale: $x_1=-3,\ x_2=x_3=3$; dacă $m\in(27,\ \infty)$, ecuația are o singură rădăcină reală, $x_1\in(-\infty,\ -1)$ **28.** Dacă $m\in(-\infty,\ -7)$, ecuația are două rădăcină reale: $x_1\in(-\infty,\ -1)$, $x_2\in(3,\ \infty)$; dacă $m=-7$, ecuația are patru rădăcini reale: $x_1=1-2\sqrt{2},\ x_2=x_3=1,\ x_4=1+2\sqrt{2}$; dacă $m\in(-7,\ 9)$, ecuația are patru rădăcini reale: $x_1\in(-\infty,\ -1),\ x_2\in(-1,\ 1),\ x_3\in(1,\ 3),\ x_4\in(3,\ \infty)$; dacă $m=9$, ecuația are patru rădăcini reale: $x_1=x_2=-1,\ x_3=x_4=3$; dacă $m\in(9,\ \infty)$, ecuația nu are nici o rădăcină reală **29.** Dacă $m\in(-\infty,\ 0)$, ecuația are o singură rădăcină reală $x_1\in(0,\ e)$; dacă $m=0$, ecuația are o singură rădăcină reală $x_1\in(0,\ e)$; dacă $m\in\left(0,\ \frac{1}{e}\right)$, ecuația are două rădăcini reale: $x_1\in(0,\ e),\ x_2\in(e,\ \infty)$; dacă $m=\frac{1}{e}$,

ecuația are rădăcina $x_1 = e$; dacă $m \in \left(\frac{1}{e},\ \infty\right)$, ecuația nu are nici o rădăcină reală **30.** Dacă $m \in (-\infty,\ 0]$, ecuația are o singură rădăcină reală $x_1 \in (-\infty,\ 2)$; dacă $m \in \left(0,\ e^{-2}\right)$, ecuația are două rădăcini reale: $x_1 \in (-\infty,\ 2)$, $x_2 \in (2,\ \infty)$; dacă $m = e^{-2}$, $x_1 = 2$ este rădăcină; dacă $m \in \left(e^{-2},\ \infty\right)$, ecuația nu are nici o rădăcină reală **31.** Dacă $m \in \left(-\infty,\ -2-\frac{\pi}{2}\right)$, ecuația are două rădăcini reale; dacă $m = -2-\frac{\pi}{2}$, $x_1 = 1$ este rădăcină; dacă $m \in \left(-2-\frac{\pi}{2},\ \infty\right)$, ecuația nu are nici o rădăcină reală **32. a)** $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; **b)** $c = e-1$; **c)** $c = \ln(e-1)$ **34.** $c = 2\sqrt{3}-2$ **35.** $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ a>0}} c(a) = 0$, $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \frac{c(a)}{a} = \frac{1}{2}$ **36.** $c = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\ln 3}}$ **37. a)** $c = \frac{7}{9}$; **b)** $c = \frac{1-\ln 4}{4}$ **38.** $c = \frac{9}{8}$ **39.** $a = 5,\ b = 2,\ c = \frac{9}{8}$ **40.** $a = 1,\ b = 0,\ c = \frac{1-e}{2e}$ **43.** $f'(0) = 0$ **45. a)** f derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$; **b)** f derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$; **c)** f derivabilă pe $\boldsymbol{R}$; **d)** f derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ **46. a)** derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{0,\ 1\}$; **b)** f este definită pe $(0,\ \infty)$ și derivabilă pe $(0,\ \infty)\setminus\{e\}$; **c)** definită pe $[0,\ 1]$ și derivabilă pe $(0,\ 1)$; **d)** definită pe $\boldsymbol{R}$ și derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{4\}$ **47. a)** $a = 17,\ b = 11$; **b)** $a = b = -1$; **c)** $a = b = -2$; **d)** $a = 5,\ b = -6$; **e)** $a = -1,\ b = -\frac{\pi}{2}$ **48.** $a = -2e-3,\ b = \frac{1}{e}$ **49.** $P(x) = 2x$ **50.** $f(x) = e^x$ **51.** $f(x) = \sin x + \cos x + 1$ **57.** $a = -1,\ b = 1$ **59.** $f(x) = \frac{\pi}{4}$, oricare ar fi $x \in (-\infty,\ 1)$, iar $f(x) = -\frac{3\pi}{4}$, oricare ar fi $x \in (1,\ \infty)$ **60.** $f(x) - g(x) = -\frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x \in (-\infty,\ 0)$, iar $f(x) - g(x) = \frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$ **61. a)** $\frac{3}{2}$; **b)** 15; **c)** $-\frac{1}{2}$; **d)** 1; **e)** 10; **f)** 1; **g)** -1; **h)** $-\frac{1}{2}$; **i)** 2; **j)** $\frac{3}{2}$ **62. a)** $\frac{2}{3}$; **b)** -1; **c)** $-6e^2$; **d)** 1; **e)** -3; **f)** 1 **63. a)** 0 dacă $n \in \{0,\ 1\}$; $-\frac{1}{3}$ dacă $n = 2$; $-\infty$ dacă $n \geq 3$ și n este par; nu există dacă $n \geq 3$ și n este impar; **b)** 0 dacă $n \in \{0,\ 1,\ 2\}$; $\frac{4}{3}$ dacă $n = 3$; ∞ dacă $n \geq 4$ și n impar; nu există dacă $n \geq 4$ și n par **64. a)** 2; **b)** ∞; **c)** 2; **d)** 0; **e)** 0; **f)** 1; **g)** 2; **h)** 1 **65. a)** 0; **b)** 0; **c)** 0; **d)** ∞; **e)** $\frac{1}{e}$; **f)** 1; **g)** $\frac{1}{2}$ **66. a)** $-\infty$; **b)** ∞; **c)** ∞; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** $\frac{1}{6}$; **f)** $\frac{1}{2}$; **g)** $-\frac{1}{2}$ **67. a)** 1; **b)** 1; **c)** e^{-1}; **d)** e; **e)** 1; **f)** e^{-1}; **g)** e^{-1} **68. a)** 1; **b)** e; **c)** e; **d)** e^{-1}; **e)** 1; **f)** 2; **g)** 1; **h)** 1 **69. a)** $\sqrt[6]{e}$; **b)** 1; **c)** ∞; **d)** $e^{-\frac{1}{2}}$; **e)** $e^{-\frac{1}{2}}$; **f)** e; **g)** $\sqrt{2}$; **h)** e^2 **70. a)** strict crescătoare pe $(-\infty,\ -2]$ și pe $[2,\ \infty)$, strict descrescătoare pe $[-2,\ 2]$; $x = -2$, punct de maxim, iar $x = 2$, punct de minim; **b)** strict crescătoare pe $(-\infty,\ -1]$ și pe $[2,\ \infty)$, strict descrescătoare pe $[-1,\ 2]$; $x = -1$, punct de maxim, iar $x = 2$, punct de minim; **c)** strict crescătoare pe $(-\infty,\ -1]$ și pe $[3,\ \infty)$, strict descrescătoare pe $[-1,\ 1)$ și pe $(1,\ 3]$; $x = -1$, punct de maxim, iar $x = 3$, punct de minim; **d)** strict descrescătoare pe $\left(-\infty,\ -1-\sqrt{3}\right]$ și pe $\left[-1+\sqrt{3},\ \infty\right)$, strict crescătoare pe $\left[-1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}\right]$; $x = -1-\sqrt{3}$, punct de minim, iar $x = -1+\sqrt{3}$, punct de maxim **71. a)** strict crescătoare pe $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$ și pe $\left[2,\ \infty\right)$, strict descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$; $x = \frac{1}{2}$, punct maxim de, iar $x = 2$, punct de minim; **b)** strict crescătoare pe $(-\infty,\ -4]$ și pe $[-2,\ \infty)$, strict descrescătoare pe $[-4,\ -2]$; $x = -4$, punct de maxim, iar

$x=-2$, punct de minim ; **c)** strict crescătoare pe $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]$ şi pe $[1,\ \infty)$, strict descrescătoare pe $\left[-\frac{1}{2},\ 0\right)$ şi pe $(0,\ 1]$; $x=-\frac{1}{2}$, punct de maxim, iar $x=1$, punct de minim; **d)** strict crescătoare pe $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ şi pe $\left[\frac{3\pi}{4},\ \pi\right]$, strict descrescătoare pe $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$ şi pe $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4}\right]$; $x=\frac{\pi}{4}$ şi $x=\pi$ sunt puncte de maxim, iar $x=0$ şi $x=\frac{3\pi}{4}$ sunt puncte de minim **72.** strict descrescătoare pe $(-\infty,\ 0]$ şi strict crescătoare pe $[1,\ \infty)$; $x=0$, punct de minim, iar $x=1$, punct de maxim. $\operatorname{Im} f=\left[-1,\ -\frac{1}{2}\right]\cup[0,\ \infty)$ **73. a)** strict descrescătoare pe $\left(-\infty,\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ şi pe $\left(0,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$, strict crescătoare pe $\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$ şi pe $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \infty\right)$; $x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ sunt puncte de minim ; **b)** strict crescătoare pe $(-\infty,\ -1]$ şi pe $[1,\ \infty)$, strict descrescătoare pe $[-1,\ 1]$; $x=-1$ este punct de maxim, iar $x=1$ este punct de minim ; **c)** strict crescătoare pe $\left(0,\ e^{-\frac{3}{2}}\right]$ şi pe $[2,\ \infty)$, strict descrescătoare pe $\left[e^{-\frac{3}{2}},\ 2\right]$; $x=e^{-\frac{3}{2}}$ este punct de maxim, iar $x=2$ este punct de minim **74.** strict descrescătoare pe $(-\infty,\ 0]$ şi strict crescătoare pe $[0,\ \infty)$; $x=0$ este punct de minim **75.** $m\in[-2,\ 2]$ **76.** $m\in(-\infty,\ -1]$ **79. a)** $m\in(1,\ 4)$ **80.** strict crescătoare pe $(-\infty,\ 0]$ şi pe $[1,\ 2]$, strict descrescătoare pe $[0,\ 1]$ şi pe $[2,\ \infty)$; $x=0$ şi $x=2$ sunt puncte de maxim, iar $x=1$ este punct de minim ; $\operatorname{Im} f=[0,\ 1]$ **81.** Fie $a\in(-\infty,\ 1)\cup(2,\ \infty)$ şi $x_1,\ x_2$ $(x_1<x_2)$ rădăcinile ecuaţiei $f'(x)=0$. Atunci, f este strict crescătoare pe $(-\infty,\ x_1]$ şi pe $[x_2,\ \infty)$, iar f este strict descrescătoare pe $[x_1,\ a)$ şi pe $(a,\ x_2]$; x_1 este punct de maxim, iar x_2 este punct de minim. Dacă $a\in(1,\ 2)$, atunci f este strict crescătoare pe $(-\infty,\ a)$ şi pe $(a,\ \infty)$. Dacă $a=1$, atunci f este strict crescătoare pe $(-\infty,\ 1)$ şi pe $(1,\ \infty)$. Dacă $a=2$, atunci f este strict crescătoare pe $(-\infty,\ 2)$ şi pe $(2,\ \infty)$ **82.** $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ **83.** $a=-3,\ b=4$ **84.** $a=4,\ b=-3,\ \operatorname{Im} f=[-4,\ 1]$ **85.** $m\in\left[\frac{1}{e^2},\ \infty\right)$ **86.** $m=1$ **87.** $a=e$ **88.** $a=\frac{4}{3}$ **89.** $x=0$ **90.** $x=0,\ x=1$ **99.** $g'(-1)=\frac{1}{4}$, $g''(-1)=\frac{3}{32}$ **100.** $\left(f^{-1}\right)'(1)=-1$ **101.** $a=1,\quad J=[-2,\ \infty),\quad f^{-1}:[-2,\ \infty)\to[1,\ \infty)$, $f^{-1}(x)=\sqrt{1+\sqrt{x+2}}$ **102. a)** concavă pe $(-\infty,\ 0)$, convexă pe $(0,\ \infty)$; $x=0$ este punct de inflexiune ; **b)** concavă pe $(0,\ 2)$, convexă pe $(-\infty,\ 0)$ şi pe $(2,\ \infty)$; $x=0$ şi $x=2$ sunt puncte de inflexiune ; **c)** convexă pe $(-\infty,\ 1)$ şi pe $(3,\ \infty)$, concavă pe $(1,\ 3)$; $x=1$ şi $x=3$ sunt puncte de inflexiune ; **d)** concavă pe $(-\infty,\ 3)$, convexă pe $(3,\ \infty)$; $x=3$ este punct de inflexiune **103. a)** concavă pe $\left(-\infty,\ 1-\sqrt{3}\right)$ şi pe $\left(1,\ 1+\sqrt{3}\right)$, convexă pe $\left(1-\sqrt{3},\ 1\right)$ şi pe $\left(1+\sqrt{3},\ \infty\right)$; $x=1-\sqrt{3}$, $x=1$ şi $x=1+\sqrt{3}$ sunt puncte de inflexiune ; **b)** concavă pe $\left(-\infty,\ -1\right)$ şi pe $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$, convexă pe $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ şi pe $\left(2,\ \infty\right)$; $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$ şi $x=2$ sunt puncte de inflexiune ; **c)** trei puncte de inflexiune: $x_1\in(-\infty,\ -2)$, $x_2\in(-2,\ 2)$, $x_3\in(2,\ \infty)$; **d)** convexă $\left(-\infty,\ -\frac{5}{2}\right)$ şi pe $\left(0,\ \infty\right)$, concavă

pe $\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$; $x=-\frac{5}{2}$ şi $x=0$ sunt puncte de inflexiune **104. a)** convexă $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)$, concavă pe $\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$; $x=\frac{1}{2}$ este punct de inflexiune; **b)** concavă pe $\left(0,\ \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$, convexă pe $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}},\ \infty\right)$; $x=\frac{1}{e\sqrt{e}}$ este punct de inflexiune ; **c)** concavă pe $(-\infty,\ -1)$ şi pe $(1,\ \infty)$, convexă pe $(-1,\ 1)$; $x=-1$ şi $x=1$ sunt puncte de inflexiune **105. a)** convexă pe $\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$, concavă pe $\left(\frac{\pi}{3},\ \pi\right)$; $x=\frac{\pi}{3}$ este punct de inflexiune ; **b)** concavă pe $(-1,\ 0)$, convexă pe $(0,\ 1)$; $x=0$ este punct de inflexiune **106. a)** concavă pe $(-\infty,\ 0)$, convexă pe $(0,\ \infty)$; $x=0$ este punct de inflexiune ; **b)** convexă $(-\infty,\ -2)$, pe $(0,\ 1)$ şi pe $(2,\ \infty)$, concavă pe $(-2,\ 0)$ şi pe $(1,\ 2)$; $x=-2$ şi $x=2$ sunt puncte de inflexiune **107. a)** convexă pe $(-\infty,\ -1)$, concavă pe $(-1,\ \infty)$; $x=-1$ punct de inflexiune; **b)** convexă pe $(-\infty,\ 0)$ şi pe $(0,\ 3)$, concavă pe $(3,\ \infty)$; $x=3$ este punct de inflexiune.

CAPITOLUL XI

GRAFICE DE FUNCȚII

§ 1. Reprezentarea grafică a funcțiilor

Probleme rezolvate

1. ***Reprezentați grafic următoarele funcții*:**
a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^3-1$ **;** **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^3-3x^2+2$ **;** **c)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=3x^4-4x^3+2$ **.**

Soluție: a) Remarcăm, mai întâi, că $f(0)=-1$ și că $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-1=0\Leftrightarrow x=1$. Deci, punctele $A(0,\ -1)$ și $B(1,\ 0)$ sunt intersecțiile lui G_f cu axele reperului cartezian xOy. Deoarece f este continuă pe $\boldsymbol{R}$ (fiind funcție polinomială), rezultă că G_f nu are asimptote verticale. Evidențiind faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, deducem că G_f nu are nici asimptote orizontale și nici asimptote oblice. Evident, f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, iar $f'(x)=3x^2$ și $f''(x)=6x$. Remarcăm și faptul că $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, iar $f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Ținând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variație a funcției este:

x	$-\infty$		0		1		∞
f'		$+$	0	$+$		$+$	
f''		$-$	0	$+$		$+$	
f	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	∞
		∩	i			∪	

Graficul funcției este în **FIGURA 1. a)** situată la pag. 303.

b) Pentru început, remarcăm că $f(0)=2$ și că $f(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-2x-2)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\left\{1-\sqrt{3},\ 1,\ 1+\sqrt{3}\right\}$. Deci, punctul $A(0,\ 2)$ este intersecția lui G_f cu Oy, iar punctele $B\left(1-\sqrt{3},\ 0\right)$, $C(1,\ 0)$ și $D\left(1+\sqrt{3},\ 0\right)$ sunt intersecțiile lui G_f cu Ox. Întrucât f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că G_f nu are asimptote verticale. Evidențiind faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, deducem că G_f nu are nici asimptote orizontale și nici asimptote oblice. Evident, f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, iar $f'(x)=3(x^2-2x)$ și $f''(x)=6(x-1)$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{0,\ 2\}$, iar $f''(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Remarcăm și faptul că $\operatorname{sgn}f'(x)=\operatorname{sgn}(x^2-2x)$, $\operatorname{sgn}f''(x)=\operatorname{sgn}(x-1)$ și că $f(2)=-2$. Ca urmare a celor stabilite anterior, tabelul de variație a funcției este:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		0		1		2		$1+\sqrt{3}$		∞
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	∞
			∩				i				∪		

Graficul funcției este în **FIGURA 1. b)** situată la pag. 303.

c) Deoarece $f(0)=2$, rezultă că punctul $A(0,\ 2)$ este intersecția lui G_f cu axa Oy. Având în vedere că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, deducem că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, rezultă că G_f nu are nici asimptotă orizontală și nici asimptotă oblică la ramura spre ∞. Evidențiind faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$, deducem că G_f nu are nici asimptotă orizontală și nici asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$. Se arată cu ușurință că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ și că $f'(x)=12x^2(x-1)$, iar $f''(x)=12(3x^2-2x)$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{0,\ 1\}$, iar $f''(x)=0\Leftrightarrow x\in\left\{0,\ \dfrac{2}{3}\right\}$. Remarcăm și faptul că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(x-1),\ \operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}(3x^2-2x)$. Pentru stabilirea numărului rădăcinilor reale ale ecuației $f(x)=0$, vom folosi șirul lui Rolle asociat funcției f. Întrucât $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $f(0)=2$, $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, rezultă că șirul lui Rolle asociat lui f nu are nici o variație de semn. Deci, ecuația $f(x)=0$ nu are nici o rădăcină în $\boldsymbol{R}$, ceea ce arată că G_f nu intersectează axa Ox. Ținând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	2	$\searrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞
		$\cup$	i	$\cap$	i	$\cup$			

Graficul funcției este în **FIGURA 1. c)** situată la pag. 303.

2. ***Fie*** $n\in\boldsymbol{N},\ n\geq 3$ ***și funcția*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=(n-1)x^n-nx^{n-1}$. ***Trasați graficul funcției*** f.

Soluție: Se observă cu ușurință că G_f depinde de paritatea lui n.

1) Fie n număr natural impar. Evident, punctul $O(0,\ 0)\in G_f$, iar punctul $A\left(\dfrac{n}{n-1},\ 0\right)$ reprezintă cel de al doilea punct în care G_f intersectează axa Ox (evidențiem și faptul că $1<\dfrac{n}{n-1}<2$). Deoarece funcția f este polinomială, G_f nu are nici o asimptotă. Se stabilește ușor că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Remarcăm și faptul că funcția f este indefinit derivabilă și că $f'(x)=n(n-1)x^{n-2}(x-1)$, iar $f''(x)=n(n-1)x^{n-3}\left[(n-1)x-(n-2)\right]$. Totodată, $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{0,\ 1\}$, iar $f''(x)=0\Leftrightarrow x\in\left\{0,\ \dfrac{n-2}{n-1}\right\}$. Evidențiem și faptul că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\big(x(x-1)\big)$ (căci $n-2$ este număr natural impar), iar $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}\big((n-1)x-(n-2)\big)$ (fiindcă $n-3$ este număr natural par). Ținând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		0		$\frac{n-2}{n-1}$		1		$\frac{n}{n-1}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f\left(\frac{n-2}{n-1}\right)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
			$\cap$		i		$\cup$				

Graficul funcției este în **FIGURA 2. a)** situată la pag. 303.

2) Fie n număr natural par. În acest caz, intersecțiile lui G_f cu axele de coordonate sunt aceleaşi ca la 1), iar G_f nu are nici o asimptotă. Remarcăm şi faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (căci n este număr par). Deoarece $n-2$ este număr par, iar $n-3$ este număr impar, rezultă că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(x-1)$, iar $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}\big(x\big((n-1)x-(n-2)\big)\big)$. Drept urmare, tabelul de variație a funcției este:

x	$-\infty$		0		$\frac{n-2}{n-1}$		1		$\frac{n-1}{n}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	∞	↘	0	↘	$f\left(\frac{n-2}{n-1}\right)$	↘	-1	↗	0	↗	∞
		∪	i	∩	i	∪					

Graficul funcției este în **FIGURA 2. b)** situată la pag. 303.

3. ***Reprezentați grafic următoarele funcții*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; **b)** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{3\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$; **c)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2-x+1}$.

Soluție: a) Se observă cu uşurință că G_f intersectează axele reperului cartezian xOy doar în punctul $O(0,\ 0)$. Deoarece f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că G_f nu are asimptote verticale. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, deducem că dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală a lui G_f atât la ramura spre $-\infty$, cât şi la ramura spre ∞. Remarcăm şi faptul că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, iar $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ şi $f''(x)=\dfrac{2(x^3-3x)}{(x^2+1)^2}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-1,\ 1\}$, iar $f''(x)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\left\{-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}\right\}$. Evidențiem şi faptul că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(1-x^2)$, iar $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}(x^3-3x)$ şi că $f(-1)=-\dfrac{1}{2},\quad f\left(-\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{4},\quad f(1)=\dfrac{1}{2},\quad f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Ținând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variație a funcției este:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		∞
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	0
		∩	i	∪			i			∩	i	∪	

Graficul funcției este în **FIGURA 3. a)** situată la pag. 303.

b) Din faptul că $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x\in\{-1,\ 2\}$, iar $f(0)=\dfrac{2}{3}$, deducem că punctele $A(-1,\ 0)$ şi $B(2,\ 0)$ sunt intersecțiile lui G_f cu axa Ox, iar punctul $C\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ este intersecția lui G_f cu axa Oy. Evident, f este continuă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{3\}$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=+\infty$, rezultă că dreapta

$x-3=0$ este asimptota verticală la G_f. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=2$, deducem că dreapta $y=x+2$ este asimptotă oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Întrucât f este funcție rațională, rezultă că dreapta $y=x+2$ este asimptotă oblică şi la ramura spre $-\infty$. Remarcăm şi faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Se arată cu uşurință că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{3\}$ şi că $f'(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$, iar $f''(x)=\dfrac{8}{(x-3)^3}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1,\,5\}$, iar $f''(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{3\}$. Totodată, $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(x^2-6x+5)$, iar $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}(x-3)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, tabelul de variație a funcției este:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		5		∞
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{3}$	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$	∞ ↘	9	↗	∞
					∩								∪		

Graficul funcției este în **FIGURA 3. b)** situată la pag. 304.

c) Remarcăm, mai întâi, că $f(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ şi că $f(0)=1$. Deci, punctul $A(-1,\ 0)$ este intersecția lui G_f cu axa Ox, iar punctul $B(0,\ 1)$ este intersecția lui G_f cu axa Oy. Deoarece f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=4$, deducem că dreapta $y=x+4$ este asimptotă oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Cum f este funcție rațională, rezultă că dreapta $y=x+4$ este asimptotă oblică şi la ramura spre $-\infty$ a lui G_f. Evidențiem şi faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Se arată cu uşurință că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ şi că $f'(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x^2-x+1)^2}$, iar $f''(x)=\dfrac{6(x+1)(x-2)(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}$. Evident, $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-1,\ 2\}$, iar $f''(x)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-1,\ \dfrac{1}{2},\ 2\right\}$. Remarcăm, totodată, că $f'(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$ şi că $\operatorname{sgn} f''(x)=$ $=\operatorname{sgn}\big[(x+1)(x-2)(2x-1)\big]$. În consecință, tabelul de variație a funcției f este :

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		∞
$f'(x)$		$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$\frac{9}{2}$	↗	8	↗	9	↗	∞
		∩	i	∪			i	∩			i	∪	

Graficul funcției este în **FIGURA 3. c)** situată la pag. 304.

4. ***Reprezentați grafic următoarele funcții*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x^2e^{-x}$**;** **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x(1-e^{-x})$**.**

Soluție: a) Se arată cu uşurinţă că G_f intersectează axele reperului cartezian xOy doar în punctul $O(0,\ 0)$. Întrucât f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Remarcând că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$, deducem că dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală la ramura spre ∞ a lui G_f. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty$, rezultă că G_f nu are asimptotă oblică (nici orizontală) la ramura spre $-\infty$. Remarcăm faptul că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, iar $f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$, iar $f''(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-x^2=0\Leftrightarrow x\in\{0,\ 2\}$, iar $f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x\in\left\{2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\right\}$. Evidențiem şi faptul că $\operatorname{sgn}f'(x)=\operatorname{sgn}(2x-x^2)$, $\operatorname{sgn}f''(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4x+2)$ şi că $f(2)=4e^{-2}$, $f\left(2-\sqrt{2}\right)=\left(6-4\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}-2}$, $f\left(2+\sqrt{2}\right)=\left(6+4\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}}$. Ținând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	↘	0	↗	$f\left(2-\sqrt{2}\right)$	↗	$4e^{-2}$	↘	$f\left(2+\sqrt{2}\right)$	↘	0
		∪			i	∩			i	∪	

Graficul funcției este în **FIGURA 4. a)** situată la pag. 304.

b) Deoarece $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ sau $1-e^{-x}=0\Leftrightarrow x=0$, rezultă că $O(0,\ 0)$ este singurul punct în care G_f intersectează axele reperului cartezian xOy. Evidențiind faptul că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, deducem că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{e^x}=0$, rezultă că dreapta $y=x$ este asimptotă oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Remarcând că $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$, deducem că G_f nu are asimptotă oblică (nici orizontală) la ramura spre $-\infty$. Se arată cu uşurință că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ şi că $f'(x)=1+(x-1)e^{-x}$, iar $f''(x)=(2-x)e^{-x}$. Remarcăm şi faptul că $f'(0)=0$ şi că $f''(x)=0\Leftrightarrow x=2$. Urmărind tabelul următor:

x	$-\infty$		0		2		∞
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$1+e^{-2}$	↘	1

,

deducem că $f'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ 0)$ şi că $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$.
Ca urmare a celor stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		0		2		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	↘	0	↗	$2(1-e^{-2})$	↗	∞
			∪		i	∩	

Graficul funcției este în **FIGURA 4. b)** situată la pag. 304.

5. ***Reprezentați grafic următoarele funcții*:**

a) $f:(0,\ \infty)\to \boldsymbol{R},\ \ f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$**;** **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ \ f(x)=x+\ln(x^2+1)$**.**

Soluție: a) Evident, punctul $A(1,\ 0)$ este intersecția lui G_f cu axa Ox. Remarcăm că f este continuă pe $(0,\ \infty)$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$, rezultă că dreapta $x=0$ este asimptotă verticală la G_f. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, deducem că dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală la ramura spre ∞ a lui G_f. Evidențiem și faptul că f este de două ori derivabilă pe $(0,\ \infty)$ și că $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, iar $f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x=e$, iar $f''(x)=0\Leftrightarrow x=e\sqrt{e}$. Totodată, $f(e)=\dfrac{1}{e}$ și $f\left(e\sqrt{e}\right)=\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$. Ținând seama că f' este continuă și nenulă pe $(0,\ e)$, iar $f'(1)>0$, deducem că $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(0,\ e)$. Analog, arătăm că $f'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(e,\ \infty)$ și că $f''(x)<0$, oricare ar fi $x\in\left(0,\ e\sqrt{e}\right)$, iar $f''(x)>0$, oricare ar fi $x\in\left(e\sqrt{e},\ \infty\right)$. Drept urmare, $x=e$ este punct de maxim al lui f, iar $x=e\sqrt{e}$ este punct de inflexiune al lui f. Având în vedere cele stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	0		1		e		$e\sqrt{e}$		∞
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$	‖	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$f(e)$	↘	$f\left(e\sqrt{e}\right)$ i	↘	0

Graficul funcției este în **FIGURA 5. a)** situată la pag. 304.

b) Pentru început, remarcăm că $f(0)=0$. Întrucât f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Remarcând că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}\right)=1$ (căci $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=0$) și $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x^2+1)=\infty$, deducem că G_f nu are asimptotă oblică (nici orizontală) la ramura spre ∞. Totodată, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\infty$. Deci, G_f nu are asimptotă oblică nici la ramura spre $-\infty$. Evidențiem și faptul că f este de două ori derivabilă pe $(0,\ \infty)$, iar $f'(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ și $f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ și că f este strict crescătoare pe $\boldsymbol{R}$. Ținând seama de acest rezultat, deducem că $x=0$ este singura soluție a ecuației $f(x)=0$. Remarcăm faptul că $f''(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-1,\ 1\}$ și că $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}(1-x^2)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, tabelul de variație a funcției este:

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-1+\ln 2$ i	↗	0	↗	$1+\ln 2$ i	↘	∞

Graficul funcției este în **FIGURA 5. b)** situată la pag. 304.

6. ***Reprezentați grafic următoarele funcții:***

a) $f:(-\infty,\ -1]\cup[1,\ \infty)\to \boldsymbol{R},\ f(x)=x\sqrt{x^2-1}$ **;**

b) $f:(-\infty,\ -1]\cup[1,\ 2)\cup(2,\ \infty)\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$.

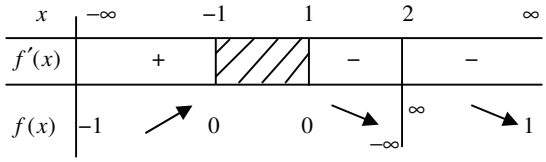
Soluție: a) Pentru început, remarcăm că mulțimea $(-\infty,\ -1]\cup[1,\ \infty)$ este simetrică față de O și că $f(-x)=-f(x)$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1]\cup[1,\ \infty)$. Deci, f este funcție impară, ceea ce arată că G_f este simetric față de O și că putem studia funcția f doar pe $[1,\ \infty)$. Evident, pentru $x\in[1,\ \infty)$, G_f intersectează axa Ox doar în punctul $A(1,\ 0)$. Se observă cu ușurință că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, rezultă că G_f nu are nici asimptotă orizontală și nici asimptotă oblică la ramura spre ∞. Evidențiem și faptul că f este de două ori derivabilă pe $(1,\ \infty)$ și că $f'(x)=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$, iar $f''(x)=\dfrac{2x^3-3x}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$. Rezultă că $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(1,\ \infty)$ și că $f''(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Având în vedere că $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}\left(2x^3-3x\right)$, deducem că $f''(x)<0$, oricare ar fi $x\in\left(1,\ \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$, iar $f''(x)>0$, oricare ar fi $x\in\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},\ \infty\right)$. Remarcăm și faptul că $f\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ținând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	1		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		∞
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ i	↗	∞

.

Graficul funcției este în **FIGURA 6. a)** situată la pag. 305.

b) Se arată cu ușurință că G_f intersectează axa Ox în punctele $A(-1,\ 0)$ și $B(1,\ 0)$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\infty$, rezultă că dreapta $x=2$ este asimptotă verticală la G_f. Remarcând că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}}=1$, deducem că dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală la ramura spre ∞ a lui G_f. Analog, arătăm că dreapta $y=-1$ este asimptotă orizontală la ramura spre $-\infty$ a lui G_f. Evidențiem și faptul că f este derivabilă pe $(-\infty,\ -1)\cup(1,\ 2)\cup(2,\ \infty)$ și că $f'(x)=\dfrac{1-2x}{(x-2)^2\sqrt{x^2-1}}$. Rezultă că $f'(x)\neq 0$, iar $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1)$ și $f'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(1,\ 2)\cup(2,\ \infty)$. Întrucât f este derivabilă pe $(-\infty,\ -1)$, este continuă în $x=-1$ și $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f'(x)=\infty$, rezultă că $f_s'(-1)=\infty$. Analog, arătăm că $f_d'(1)=-\infty$. Ca urmare a celor stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

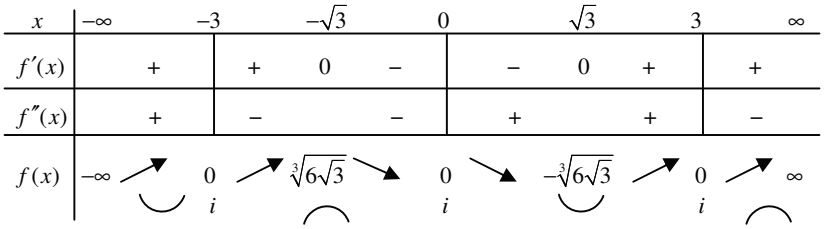


Graficul funcției este în **FIGURA 6. b)** situată la pag. 305.

7. ***Reprezentați grafic următoarele funcții*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3-9x}$ **;** **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2(x-3)}$ **.**

Soluție: a) Remarcăm, mai întâi, că $f(-x)=-f(x)$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Deci, f este o funcție impară, ceea ce arată că graficul lui f este simetric față de punctul $O(0,\ 0)$. Prin urmare, putem studia funcția f doar pentru $x\in[0,\ \infty)$. Evidențiem și faptul că $f(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-3,\ 0,\ 3\}$, ceea ce arată că punctele $A(-3,\ 0)$, $O(0,\ 0)$ și $B(3,\ 0)$ sunt intersecțiile lui G_f cu axa Ox. Deoarece f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=0$, deducem că dreapta $y=x$ este asimptotă oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Se arată cu ușurință că f este derivabilă pe $(0,\ 3)\cup(3,\ \infty)$ și că $f'(x)=\dfrac{3x^2-9}{\sqrt[3]{\left(x^3-9x\right)^2}}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ (căci $x>0$) și că $\operatorname{sgn}f'(x)=\operatorname{sgn}\left(3x^2-9\right)$. Ținând seama că f este derivabilă pe $(0,\ 3)$, este continuă în $x=0$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)=-\infty$, deducem că f are derivată la dreapta în $x=0$, iar $f'_d(0)=-\infty$, ceea ce arată că G_f are semitangentă la dreapta în punctul $O(0,\ 0)$, iar aceasta coincide cu semiaxa Oy (negativă). Întrucât f este derivabilă pe $(0,\ 3)\cup(3,\ \infty)$, este continuă în $x=3$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}f'(x)=\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}f'(x)=\infty$, rezultă că f are derivate laterale în $x=3$, iar $f'_s(3)=f'_d(3)=\infty$, ceea ce arată că cele două semitangente la G_f în punctul $B(3,\ 0)$ sunt în prelungire și, totodată, paralele cu axa Oy. În urma unui calcul mai laborios, arătăm că $f''(x)=\dfrac{9(x^2+3)}{x\left(9-x^2\right)\sqrt[3]{\left(x^3-9x\right)^2}}$ și că $\operatorname{sgn}f''(x)=\operatorname{sgn}\left(x\left(9-x^2\right)\right)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, deducem că tabelul de variație a funcției f este:



Graficul funcției este în **FIGURA 7. a)** situată la pag. 305.

b) Întrucât $f(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^2(x-3)=0\Leftrightarrow x\in\{-1,\ 3\}$, iar $f(0)=-\sqrt[3]{3}$, rezultă că punctele $A(-1,\ 0)$ și $B(3,\ 0)$ sunt intersecțiile lui G_f cu axa Ox, iar punctul $C\left(0,\ -\sqrt[3]{3}\right)$ este intersecția lui G_f cu axa Oy. Având în vedere că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, deducem că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=-\dfrac{1}{3}$, rezultă că dreapta $y=x-\dfrac{1}{3}$ este asimptotă oblică la

ramura spre ∞ a lui G_f. Analog, arătăm că $y = x - \frac{1}{3}$ este asimptotă oblică şi la ramura spre $-\infty$ a lui G_f.

Evident, f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 3\}$. Se arată cu uşurinţă că $f'(x) = \dfrac{3x-5}{3\sqrt[3]{(x+1)(x-3)^2}}$.

Rezultă că $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ şi că $\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}\big((x+1)(3x-5)\big)$. Remarcând că f este derivabilă pe $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 3)$, este continuă în $x=-1$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f'(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f'(x) = -\infty$, deducem că f are derivate laterale în $x=-1$, iar $f'_s(-1)=\infty$ şi $f'_d(-1)=-\infty$, ceea ce arată că $A(-1,\ 0)$ este punct de întoarcere al lui G_f. Analog, arătăm că f are derivate laterale în $x=3$, iar $f'_s(3) = f'_d(3) = \infty$. Rezultă că semitangentele la G_f în punctul $B(3,\ 0)$ sunt în prelungire şi, totodată, paralele cu axa Oy. Printr-un calcul puţin mai complicat stabilim că $f''(x) = \dfrac{-32}{9(x-3)\sqrt[3]{(x+1)^4(x-3)^2}}$. Deci, $f''(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in \boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 3\}$, iar $\operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(3-x)$. Ţinând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variaţie a funcţiei f este:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{5}{3}$		3		∞
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f''(x)$		$+$	$\|$	$+$		$+$		$+$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{3}$	$\searrow$	$-\frac{4\sqrt[3]{3}}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
				$\cup$					i	$\cap$	

Graficul funcţiei este în **FIGURA 7. b)** situată la pag. 305.

8. ***Reprezentaţi grafic următoarele funcţii*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{|x|(x-1)}{x+1}$**;** **b)** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{|x+1|}{|x|+1}$**.**

Soluţie: a) Remarcând că $f(x)=0\Leftrightarrow |x|(x-1)=0\Leftrightarrow x\in\{0,\ 1\}$, deducem că G_f intersectează axa Ox în punctele $O(0,\ 0)$ şi $A(1,\ 0)$. Evident, f este continuă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=-\infty$, rezultă că dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală la G_f. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=-2$, deducem că dreapta $y=x-2$ este asimptotă oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x(x-1)}{x+1}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{x+1}=-1$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)+x\big)=2$, rezultă că dreapta $y=-x+2$ este asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$ a lui G_f. Se arată cu uşurinţă că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 0\}$. Dacă $x\in(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0)$, atunci $f'(x)=\dfrac{1-2x-x^2}{(x+1)^2}$, iar dacă $x\in(0,\ \infty)$, atunci $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$. Remarcăm şi faptul că $f'(x)=0$ dacă $x=-1-\sqrt{2}$ sau $x=-1+\sqrt{2}$.

Întrucât f este derivabilă pe $(-1,\ 0)\cup(0,\ \infty)$, este continuă în $x=0$ şi că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1-2x-x^2}{(x+1)^2}=1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-1$, rezultă că f are derivate laterale în $x=0$, iar $f'_s(0)=1,\ f'_d(0)=-1$, ceea ce arată că $O(0,\ 0)$ este punct unghiular al lui G_f. Evidenţiem şi faptul că $f\left(-1-\sqrt{2}\right)=3+2\sqrt{2}$, iar $f\left(-1+\sqrt{2}\right)=-3+2\sqrt{2}$. Stabilim, totodată, că, dacă $x\in(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0)$, atunci $f''(x)=-\dfrac{4}{(x+1)^3}$, iar dacă $x\in(0,\ \infty)$, atunci $f''(x)=\dfrac{4}{(x+1)^3}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, tabelul de variaţie a funcţiei f este:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		0		$-1+\sqrt{2}$		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	∞	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
		$\cap$			$-\infty$	$\cap$							

.

Graficul funcţiei este în **FIGURA 8. a)** situată la pag. 305.

b) Deoarece $f(x)=0\Leftrightarrow |x+1|=0\Leftrightarrow x=-1$, iar $f(0)=1$, rezultă că punctul $A(-1,\ 0)$ este intersecţia lui G_f cu axa Ox, iar punctul $B(0,\ 1)$ este intersecţia lui G_f cu axa Oy. Remarcând faptul că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, deducem că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Pentru cele ce urmează, trebuie să explicităm cele două module care intervin în $f(x)$. După explicitare, obţinem:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1} & ,\ x\in(-\infty,\ -1)\\ \dfrac{x+1}{1-x} & ,\ x\in[-1,\ 0]\\ 1 & ,\ x\in(0,\ \infty)\end{cases}.$$

Evident, dacă $x\in(0,\ \infty)$, atunci graficul lui f este o semidreaptă paralelă cu axa Ox. Rămâne să analizăm doar cazul în care $x\in(-\infty,\ 0]$. Întrucât $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, rezultă că dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală la ramura spre $-\infty$ a lui G_f. Se observă cu uşurinţă că f este de două ori derivabilă pe $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0)$. Dacă $x\in(-\infty,\ -1)$, atunci $f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$, iar dacă $x\in(-1,\ 0)$, atunci $f'(x)=\dfrac{2}{(1-x)^2}$. Având în vedere că f este derivabilă pe $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0)$, este continuă în $x=-1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f'(x)=-\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f'(x)=\dfrac{1}{2}$, deducem că f are derivate laterale în $x=-1$, iar $f'_s(-1)=-\dfrac{1}{2}$, $f'_d(-1)=\dfrac{1}{2}$. Rezultă că $A(-1,\ 0)$ este punct unghiular al lui G_f. Analog, arătăm că f are derivată laterală la stânga în $x=0$, iar $f'_s(0)=2$. Remarcăm şi faptul că, dacă $x\in(-\infty,\ -1)$, atunci $f''(x)=\dfrac{4}{(x-1)^3}$, iar dacă $x\in(-1,\ 0)$, atunci $f''(x)=\dfrac{4}{(1-x)^3}$. Ţinând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variaţie a funcţiei f (pentru $x\in(-\infty,\ 0]$) este:

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	1

.

Graficul funcției este în **FIGURA 8. b)** situată la pag. 305.

9. ***Reprezentați grafic următoarele funcții:***

a) $f:(-\pi,\ \pi)\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{2\cos x}{1+\cos x}$**;** **b)** $f:\left(-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}\right)\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{2\sin x}{\sin x+\cos x}$**;**

c) $f:(0,\ \pi)\cup(\pi,\ 2\pi)\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin x}$**.**

Soluție: a) Deoarece $f(x)=0\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right\}$ (căci $-\pi<x<\pi$), iar $f(0)=1$, rezultă că punctele $A\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ și $B\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ sunt intersecțiile lui G_f cu axa Ox, iar punctul $C(0,\ 1)$ este intersecția lui G_f cu axa Oy. Evident, f este continuă pe $(-\pi,\ \pi)$. Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to -\pi\\ x>-\pi}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} f(x)=-\infty$, deducem că dreptele $x=-\pi$ și $x=\pi$ sunt asimptote verticale la G_f. Având în vedere că domeniul de definiție al lui f este o mulțime mărginită, G_f nu are asimptote oblice (orizontale). Se arată cu ușurință că f este de două ori derivabilă pe $(-\pi,\ \pi)$ și că $f'(x)=-\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$, iar $f''(x)=\dfrac{2(\cos x-2)}{(1+\cos x)^2}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, iar $f''(x)<0$, oricare ar fi $x\in(-\pi,\ \pi)$. Ținând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$

.

Graficul funcției este în **FIGURA 9. a)** situată la pag. 306.

b) Întrucât $f(x)=0\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x\in\{0,\ \pi\}$ (căci $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{7\pi}{4}$), rezultă că punctele $O(0,\ 0)$ și $A(\pi,\ 0)$ sunt intersecțiile lui G_f cu axa Ox. Se arată cu ușurință că f este continuă pe $\left(-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$. Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{\pi}{4}\\ x>-\frac{\pi}{4}}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{3\pi}{4}\\ x<\frac{3\pi}{4}}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{3\pi}{4}\\ x>\frac{3\pi}{4}}} f(x)=-\infty$ și

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{7\pi}{4}\\ x<\frac{7\pi}{4}}} f(x)=\infty$, deducem că dreptele $x=-\frac{\pi}{4},\ x=\frac{3\pi}{4}$ şi $x=\frac{7\pi}{4}$ sunt asimptote verticale la G_f . Având în vedere că domeniul de definiţie a funcţiei f este o mulţime mărginită, G_f nu are asimptote oblice (orizontale). Evident, f este derivabilă pe domeniul de definiţie. Stabilim cu uşurinţă că $f'(x)=\frac{2}{(\sin+\cos x)^2}$, iar $f''(x)=\frac{4(\sin x-\cos x)}{(\sin x+\cos x)^3}$. Remarcăm că $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right)$ şi că $f''(x)=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right\}$, iar $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}(\sin x-\cos x)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, tabelul de variaţie a funcţiei f este :

x	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$
$f'(x)$	|	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	|
$f''(x)$	|	$-$		$-$	0	$+$		$-$		$-$	0	$+$	|
$f(x)$	|	$-\infty$ ↗	0	↗	1	↗	∞	$-\infty$ ↗	0	↗	1	↗	∞
			∩		i	∪			∩		i	∪	

.

Graficul funcţiei este în **FIGURA 9. b)** situată la pag. 306.

c) Remarcăm, mai întâi, că $f(x)=0\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right\}$ (căci $0<x<2\pi$). Deci, punctele $A\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$, $B\left(\frac{3\pi}{4},\ 0\right)$, $C\left(\frac{5\pi}{4},\ 0\right)$ şi $D\left(\frac{7\pi}{4},\ 0\right)$ sunt intersecţiile lui G_f cu axa Ox. Evident, f este continuă pe tot domeniul ei de definiţie. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x>\pi}} f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 2\pi\\ x<2\pi}} f(x)=-\infty$, deducem că dreptele $x=0,\ x=\pi$ şi $x=2\pi$ sunt asimptote verticale ale lui G_f . Având în vedere că domeniul de definiţie a funcţiei este o mulţime mărginită, G_f nu are asimptote oblice (orizontale). Se arată cu uşurinţă că f este derivabilă pe $(0,\ \pi)\cup(\pi,\ 2\pi)$ şi că $f'(x)=-\frac{\cos x(2\sin^2 x+1)}{\sin^2 x}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right\}$, (fiindcă $0<x<2\pi$) iar $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(-\cos x)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, tabelul de variaţie a funcţiei f este :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$	|	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	|
$f(x)$	|	∞ ↘	0	↘	-1	↗	0	↗	∞	$-\infty$ ↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$
					∪				∩								

.

Graficul funcţiei este în **FIGURA 9. c)** situată la pag. 306.

10. ***Reprezentați grafic următoarele funcții*:**

a) $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$**;** **b)** $f:[-2,\ 2]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\arccos\dfrac{x^3-3x}{2}$**.**

Soluție: a) Deoarece $f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{x+1}=0\Leftrightarrow x=0$, rezultă că $O(0,\ 0)$ este singurul punct în care G_f intersectează axele reperului xOy. Remarcând că funcția f este continuă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$ (fiind compusa a două funcții continue) şi că $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$, deducem că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{\pi}{4}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{\pi}{4}$, rezultă că dreapta $y=\dfrac{\pi}{4}$ este asimptotă orizontală a lui G_f atât la ramura spre ∞, cât şi la ramura spre $-\infty$. Evident, f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$. Evidențiem şi faptul că $f'(x)=\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$, iar $f''(x)=-\dfrac{4x+2}{\left(2x^2+2x+1\right)^2}$. Se arată cu uşurință că $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$, iar $f''(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ şi $\operatorname{sgn}f''(x)=\operatorname{sgn}(-4x-2)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		∞
$f'(x)$	$+$		$+$		$+$		$+$		
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		
$f(x)$	$\frac{\pi}{4}$	↗	$\frac{\pi}{2}$ $\mid$ $-\frac{\pi}{2}$	↗	$-\frac{\pi}{4}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{4}$
					i				

Graficul funcției este în **FIGURA 10. a)** situată la pag. 306.

b) Remarcăm, mai întâi, că funcția f este corect definită (căci $-1\le\dfrac{x^3-3x}{2}\le1$, oricare ar fi $x\in[-2,\ 2]$). Deoarece $f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^3-3x}{2}=1\Leftrightarrow x^3-3x-2=0\Leftrightarrow(x+1)^2(x-2)=0\Leftrightarrow x\in\{-1,\ 2\}$, iar $f(0)=\arccos0=\dfrac{\pi}{2}$, rezultă că punctele $A(-1,\ 0)$ şi $B(2,\ 0)$ sunt intersecțiile lui G_f cu axa Ox, iar punctul $C\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ este intersecția lui G_f cu axa Oy. Remarcăm şi faptul că $f(-2)=\pi$, iar $f(2)=0$. Evidențiind faptul că f este continuă pe $[-2,\ 2]$, deducem că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Cum domeniul de definiție al funcției f este o mulțime mărginită, G_f nu are nici asimptote orizontale şi nici asimptote oblice. Remarcăm că funcția f este derivabilă dacă şi numai dacă $-1<\dfrac{x^3-3x}{2}<1$, ceea ce conduce la $(x+1)^2(x+2)>0$ şi $(x+1)^2(x-2)<0$, de unde $x\in(-2,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ 2)$. Totodată, $f'(x)=-\dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}}$ dacă $x\in(-2,\ -1)\cup(1,\ 2)$, iar $f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}}$ dacă $x\in(-1,\ 1)$. Având în vedere că f este derivabilă pe $(-2,\ -1)$, este continuă în $x=-2$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}f'(x)=-\infty$, deducem că f are derivată la dreapta în $x=-2$ şi $f'_d(-2)=-\infty$, ceea ce arată că G_f are semitangentă în punctul $D(-2,\ \pi)$, iar aceasta este paralelă cu axa Oy. Ținând seama că f este derivabilă pe $(-2,\ -1)\cup(-1,\ 1)$, este continuă în $x=-1$,

iar $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f'(x)=-\sqrt{3}$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f'(x)=\sqrt{3}$, deducem că f are derivate laterale în $x=-1$, iar $f'_s(-1)=-\sqrt{3}$, $f'_d(-1)=\sqrt{3}$, ceea ce arată că $A(-1,\ 0)$ este punct unghiular al lui G_f. Analog, arătăm că $E(1,\ \pi)$ este punct unghiular al lui G_f şi că în punctul $B(2,\ 0)$ G_f are semitangentă la stânga, iar aceasta este paralelă cu axa Oy. În final, arătăm că $f''(x)=-\dfrac{3x}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ dacă $x\in(-2,\ -1)\cup(1,\ 2)$ şi că $f''(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ dacă $x\in(-1,\ 1)$. Rezultă că $f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Ţinând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variaţie a funcţiei f este:

x	-2		-1		0		1		2
$f'(x)$	‖	$-$		$+$		$+$		$-$	‖
$f''(x)$	‖	$+$		$-$	0	$+$		$-$	‖
$f(x)$	π	↘ ∪	0	↗ ∩	$\dfrac{\pi}{2}$	↗ ∪	π	↘ ∩	0

i

Graficul funcţiei este în **FIGURA 10. b)** situată la pag. 306.

11. ***Reprezentaţi grafic funcţia*** $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x+\sqrt{|x^2-1|}$**.**

Soluţie: Evident, $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{|x^2-1|}=-x\Leftrightarrow x\le 0$ şi $|x^2-1|=x^2$. Dacă $x\in(-\infty,\ -1]$, atunci ultima ecuaţie conduce la $x^2-1=x^2$, ceea ce nu este posibil. Dacă $x\in(-1,\ 0]$, atunci ecuaţia menţionată anterior conduce la $1-x^2=x^2$, de unde $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Având în vedere şi faptul că $f(0)=1$, deducem că punctul $A\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ este intersecţia lui G_f cu axa Ox, iar punctul $B(0,\ 1)$ este intersecţia lui G_f cu axa Oy. Deoarece funcţia f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Remarcând că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)=2$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$, deducem că dreapta $y=2x$ este asimptotă oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=0$, rezultă că dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală la ramura spre $-\infty$ a lui G_f. Se arată cu uşurinţă că funcţia f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,\ 1\}$. Dacă $x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)$, atunci $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}+x=0\Leftrightarrow x\in(-\infty,\ -1)$ şi $x^2-1=x^2$, ceea ce nu este posibil. Ţinând seama că funcţia f' este continuă şi nenulă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -1)$ şi $(1,\ \infty)$, iar $f'(-2)<0$ şi $f'(2)>0$, deducem că $f'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ -1)$, iar $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(1,\ \infty)$. Dacă $x\in(-1,\ 1)$, atunci $f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=x\Leftrightarrow x\in(0,\ 1)$ şi $1-x^2=x^2$, de unde $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Având în vedere că funcţia f' este continuă şi nenulă pe fiecare dintre intervalele $\left(-1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ şi $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right)$,

iar $f'(0)>0$ şi $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<0$, deducem că $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in\left(-1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, iar $f'(x)<0$, oricare ar fi $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right)$. Întrucât f este derivabilă pe $(-1,\ 1)\cup(1,\ \infty)$, este continuă în $x=1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}=\infty$, rezultă că f are derivate laterale în $x=1$, iar $f'_s(1)=-\infty,\ f'_d(1)=\infty$. Drept urmare, punctul $C(1,\ 1)$ este punct de întoarcere al lui G_f. Analog, arătăm că f are derivate laterale în $x=-1$, iar $f'_s(-1)=-\infty,\ f'_d(-1)=\infty$, ceea ce arată că şi punctul $D(-1,\ -1)$ este punct de întoarcere al lui G_f. Ca urmare a celor stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este următorul:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		∞
$f'(x)$		$-$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞

Graficul funcției este în **FIGURA 11** situată la pag. 306.

12. ***Se consideră funcția*** $f:D\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{e^x-2}{e^x-2x}$, ***unde*** D ***notează mulțimea maximă pe care poate fi definită funcția*** f.

a) ***Arătați că*** $D=\boldsymbol{R}$.

b) ***Reprezentați grafic funcția*** f.

Soluție: a) Se consideră funcția auxiliară $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ g(x)=e^x-2x$. Evident, g este derivabilă şi $g'(x)=e^x-2$. Rezultă că $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\ln 2$. Se arată cu uşurință că $g'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ \ln 2)$, iar $g'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(\ln 2,\ \infty)$. Deci, $x=\ln 2$ este punct de minim al lui g. Fiind singurul punct de minim, deducem că $g(x)\geq g(\ln 2)$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Cum $g(\ln 2)=2-2\ln 2=$ $=2(1-\ln 2)>0$, rezultă că $g(x)>0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$. Prin urmare, $e^x-2x\neq 0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}$, ceea ce arată că $D=\boldsymbol{R}$.

b) Deoarece $f(x)=0\Leftrightarrow e^x-2=0\Leftrightarrow x=\ln 2$, iar $f(0)=-1$, rezultă că punctul $A(\ln 2,\ 0)$ este intersecția lui G_f cu axa Ox, iar punctul $B(0,\ -1)$ este intersecția lui G_f cu axa Oy. Remarcând că f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, deducem că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, iar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, rezultă că dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală la ramura spre ∞ a lui G_f, iar dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală la ramura spre $-\infty$. Se arată cu uşurință că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ şi că $f'(x)=\frac{-2\left[(x-2)e^x+2\right]}{\left(e^x-2x\right)^2}$. Remarcăm şi faptul că $f'(0)=0$. Să analizăm dacă ecuația $f'(x)=0$ nu are şi altă rădăcină în afară de 0. Pentru aceasta, vom considera funcția auxiliară $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ h(x)=(x-2)e^x+2$. Funcția h este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, iar $h'(x)=(x-1)e^x$. Deducem imediat că h este strict descrescătoare pe $(-\infty,\ 1]$ şi strict crescătoare pe $[1,\ \infty)$. Cum h este strict descrescătoare pe $(-\infty,\ 1]$, rezultă că 0 este singura rădăcină a ecuației $h(x)=0$ în intervalul $(-\infty,\ 1]$. Având în vedere că h este strict crescătoare pe $[1,\ \infty)$ şi că $h(1)=-e+2<0$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\infty$, deducem că există un singur $x_1\in[1,\ \infty)$ astfel încât $h(x_1)=0$. Deci, x_1 este cea de a doua rădăcină a ecuației $f'(x)=0$. În plus, putem arăta că $x_1\in(1,\ 2)$. Drept urmare, tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		1		x_1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↗	$f(x_1)$	↘	1

.

Graficul funcției este în **FIGURA 12** situată la pag. 307.

§ 2. Rezolvarea grafică a ecuațiilor

1. ***Fie*** m ***un parametru real şi funcția*** $f : \boldsymbol{R} \setminus \{-1,\ 1\} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

a) ***Reprezentați grafic funcția*** f.

b) ***Stabiliți, în funcție de*** m, ***numărul rădăcinilor reale ale ecuației*** $x^3 - mx^2 + m = 0$. ***Precizați, totodată, semnul fiecăreia dintre rădăcini.***

Soluție: a) Evident, $O(0,\ 0)$ este singurul punct în care G_f intersectează axele reperului cartezian xOy. Deoarece f este o funcție rațională, ea este continuă şi indefinit derivabilă pe tot domeniul ei de definiție. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \infty$, deducem că dreptele $x = -1$ şi $x = 1$ sunt asimptote verticale ale lui G_f. Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - x\big) = 0$, rezultă că dreapta $y = x$ este asimptotă oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Remarcăm şi faptul că dreapta $y = x$ este asimptotă oblică şi la ramura spre $-\infty$ a lui G_f. Se arată cu uşurință că $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ şi $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$. Rezultă că $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}\}$, iar $f''(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 0$. Menționăm şi faptul că $\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x^2-3)$, iar $\operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}\big(x(x^2-1)\big)$. Totodată, $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ şi $f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. În baza celor stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$	0	$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$	∞	↘	0	↘	$-\infty$	∞	↘	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	∞
		∩				∪		i		∩		∪			

.

Graficul funcției este în **FIGURA 1** situată la pag. 307 .

b) Remarcăm, mai întâi, că ecuația $x^3 - mx^2 + m = 0$ este cea care dă abscisele punctelor de intersecție ale lui G_f cu dreapta variabilă $y = m$ (care este paralelă cu axa Ox). Rezultă că:

dacă $m \in \left(-\infty,\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, atunci ecuația considerată are trei rădăcini reale simple (fie acestea $x_1,\ x_2,\ x_3$), iar $x_1 < 0,\ x_2 < 0$ şi $x_3 > 0$;

dacă $m=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, atunci ecuația considerată are trei rădăcini reale: $x_1=x_2=-\sqrt{3}$ şi $x_3>0$;

dacă $m\in\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$, atunci ecuația considerată are o singură rădăcină reală pozitivă;

dacă $m=0$, atunci ecuația considerată are o rădăcină triplă $x=0$;

dacă $m\in\left(0,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, atunci ecuația considerată are o singură rădăcină reală negativă;

dacă $m=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, atunci ecuația considerată are trei rădăcini reale: $x_1<0,\ x_2=x_3=\sqrt{3}$;

dacă $m\in\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \infty\right)$, atunci ecuația considerată are trei rădăcini reale simple, iar $x_1<0,\ x_2>0,\ x_3>0$.

2. ***Fie*** m ***un parametru real şi funcția*** $f:\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$.

a) ***Reprezentați grafic funcția*** f.

b) ***Stabiliți, în funcție de valorile lui*** m, ***numărul rădăcinilor reale ale ecuației*** $|f(x)|=m$. ***Precizați, totodată, semnul fiecăreia dintre rădăcini.***

Soluție: a) Se arată cu uşurință că G_f nu intersectează axa Ox şi că $A(0,\ -2)$ este punctul în care G_f intersectează axa Oy. Deoarece f este o funcție rațională, ea este continuă şi indefinit derivabilă. Având în vedere că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\infty$, deducem că dreapta $x=1$ este asimptotă verticală la G_f. Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=2$, rezultă că dreapta $y=x+2$ este asimptotă oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Remarcăm şi faptul că dreapta $y=x+2$ este asimptotă oblică şi la ramura spre $-\infty$ a lui G_f (căci f este funcție rațională). Se arată cu uşurință că $f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, iar $f''(x)=\frac{8}{(x-1)^3}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-1,\ 3\}$ şi că $f''(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$. Totodată, $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(x^2-2x-3)$ şi $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}(x-1)$, iar $f(-1)=-1$ şi $f(3)=7$. Ținând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		-1		0		1		3		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↘	$-\infty$	∞ ↘	7	↗	∞

Graficul funcției este în **FIGURA 2. a)** situată la pag. 307.

b) Întrucât $f(x)<0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ 1)$ şi $f(x)>0$, oricare ar fi $x\in(1,\ \infty)$, rezultă că $|f(x)|=-f(x)$, oricare ar fi $x\in(-\infty,\ 1)$, iar $|f(x)|=f(x)$, oricare ar fi $x\in(1,\ \infty)$. În baza acestei observații, reprezentarea grafică a funcției $|f|$ este în **FIGURA 2. b)** situată la pag. 307.

Remarcând faptul că abscisele punctelor de intersecție ale lui $G_{|f|}$ cu dreapta $y=m$ sunt soluțiile ecuației $|f(x)|=m$, deducem că:

dacă $m\in(-\infty,\ 1)$, atunci ecuația $|f(x)|=m$ nu are nici o rădăcină în $\boldsymbol{R}$;

dacă $m=1$, atunci ecuația $|f(x)|=m$ are două rădăcini reale egale ($x_1=x_2=-1$);

dacă $m\in(1,\ 2)$, atunci ecuația $|f(x)|=m$ are două rădăcini reale negative;

dacă $m=2$, atunci ecuația $|f(x)|=m$ are două rădăcini reale ($x_1=-3,\ x_2=0$);

dacă $m\in(2,\ 7)$, atunci ecuația $|f(x)|=m$ are două rădăcini reale($x_1<0,\ x_2>0$);

dacă $m=7$, atunci ecuația $|f(x)|=m$ are patru rădăcini reale ($x_1<0,\ x_2>0,\ x_3=x_4=3$);

dacă $m\in(7,\ \infty)$, atunci ecuația $|f(x)|=m$ are patru rădăcini reale distincte ($x_1<0,\ x_2>0,\ x_3>0,\ x_4>0$).

3. ***Fie*** m ***un parametru real şi ecuația***

$$x^3+(2-m)x^2+(1-2m)x-m+4=0. \qquad \textbf{(1)}$$

Determinați, în funcție de valorile lui m, ***numărul rădăcinilor reale ale ecuației*** **(1)** ***şi precizați semnul fiecăreia dintre rădăcini.***

Soluție: Deoarece $x=-1$ nu este rădăcină a ecuației (1), rezultă că $(1)\Leftrightarrow x^3+2x^2+x+4=m(x^2+2x+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x+1)^2+4=m(x+1)^2\Leftrightarrow x+\dfrac{4}{(x+1)^2}=m$. Pentru a răspunde cerinței enunțului, trebuie să reprezentăm grafic funcția $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=x+\dfrac{4}{(x+1)^2}$. Remarcăm, mai întâi, că $f(x)=0\Leftrightarrow x(x+1)^2+4=0$ $(x\neq-1)\ \Leftrightarrow\ x^3+2x^2+x+4=0\ \ (x\neq-1)$. Să considerăm funcția auxiliară $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=x^3+2x^2+x+4$. Evident, $g'(x)=3x^2+4x+1$, iar $g'(x)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-1,\ -\dfrac{1}{3}\right\}$. Să întocmim şirul lui Rolle asociat funcției g. Acesta este: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty,\ g(-1)>0,\ g\left(-\dfrac{1}{3}\right)>0,\ \lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$. Cum acest şir are o singură variație de semn, rezultă că ecuația $g(x)=0$ are o singură rădăcină reală (fie aceasta x_0), iar $x_0\in(-\infty,\ -1)$. Remarcând şi faptul că $g(-3)<0$, iar $g(-2)>0$, deducem că $x_0\in(-3,\ -2)$. Drept urmare, punctul $A(x_0,\ 0)$ reprezintă intersecția lui G_f cu axa Ox. Evidențiem şi faptul că punctul $B(0,\ 4)$ este intersecția lui G_f cu axa Oy. Evident, f este continuă şi de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$. Întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=\infty$, rezultă că dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală la G_f. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=0$, deducem că dreapta $y=x$ este asimptotă oblică la ramura spre ∞ a lui G_f. Cum f este o funcție rațională, această dreaptă este şi asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$ a lui G_f. Menționăm şi faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Se arată cu uşurință că $f'(x)=1-\dfrac{8}{(x+1)^3}=$

$=\dfrac{(x+1)^3-8}{(x+1)^3}=\dfrac{(x-1)\big[(x+1)^2+2(x+1)+4\big]}{(x+1)^3}$, iar $f''(x)=\dfrac{24}{(x+1)^4}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ şi că $f''(x)>0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$. Totodată, $\operatorname{sgn}f'(x)=\operatorname{sgn}\big((x+1)(x-1)\big)$. Ținând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		x_0		-1		0		1		∞
$f'(x)$		$+$		$+$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	∞ ∞	↘	4	↘	2	↗	∞

.

Graficul funcției este în **FIGURA 3** situată la pag. 307 .

Având în vedere că ecuația (1) este cea care dă abscisele punctelor de intersecție ale lui G_f cu dreapta $y = m$, deducem că:

dacă $m \in (-\infty,\ 2)$, ecuația (1) are o singură rădăcină reală, iar aceasta este negativă;

dacă $m = 2$, ecuația (1) are trei rădăcini reale ($x_1 = -2,\ x_2 = x_3 = 1$);

dacă $m \in (2,\ 4)$, ecuația (1) are trei rădăcini reale (una negativă şi două strict pozitive);

dacă $m = 4$, ecuația (1) are trei rădăcini reale ($x_1 = 1 - 2\sqrt{2} < 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1 + 2\sqrt{2} > 0$);

dacă $m \in (4,\ \infty)$, ecuația (1) are trei rădăcini reale (două negative şi una pozitivă).

4. ***Fie*** m ***un parametru real şi ecuația*** $2\sqrt{x^2+1} = m(1-x)$. ***Determinați, în funcție de valorile lui*** m, ***numărul rădăcinilor reale ale acestei ecuații şi precizați semnul fiecăreia dintre rădăcini.***

Soluție: Deoarece $x = 1$ nu este rădăcină a ecuației considerate, rezultă că $2\sqrt{x^2+1} = m(1-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{(1-x)} = m$. Pentru a răspunde cerinței enunțului, vom trasa mai întâi graficul funcției $f : \boldsymbol{R} \setminus \{1\} \to \boldsymbol{R}$,

$f(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{1-x}$. Se arată cu uşurință că G_f nu intersectează axa Ox şi că punctul $A(0,\ 2)$ reprezintă intersecția lui G_f cu axa Oy. Evident, f este continuă pe $\boldsymbol{R} \setminus \{1\}$. Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$, deducem că dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală la G_f. Totodată, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, iar $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -2$. Rezultă că dreapta $y = 2$ este asimptotă orizontală la ramura spre $-\infty$ a lui G_f, iar $y = -2$ este asimptotă orizontală la ramura spre ∞ a lui G_f. Evidențiem şi faptul că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R} \setminus \{1\}$ şi că $f'(x) = \dfrac{2(x+1)}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}$. Prin urmare, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, iar $\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x+1)$. Ca urmare a celor stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	∞ $\quad -\infty$	$\nearrow$	-2

.

Graficul funcției este în **FIGURA 4** situată la pag. 308.

Având în vedere că rădăcinile ecuației considerate reprezintă abscisele punctelor de intersecție ale lui G_f cu dreapta $y = m$, deducem că:

dacă $m \in (-\infty,\ -2)$, ecuația din enunț are o rădăcină reală strict pozitivă;

dacă $m \in \left[-2,\ \sqrt{2}\right)$, ecuația din enunț nu are nici o rădăcină în $\boldsymbol{R}$;

dacă $m = \sqrt{2}$, ecuația considerată are o rădăcină reală ($x = -1$);

dacă $m \in \left(\sqrt{2},\ 2\right)$, ecuația considerată are două rădăcini reale negative;

dacă $m = 2$, ecuația din enunț are o singură rădăcină reală ($x = 0$);

dacă $m \in (2,\ \infty)$, ecuația considerată are o rădăcină reală strict pozitivă.

5. ***Fie*** m ***un parametru real şi ecuația*** $x - 1 = m\,e^x$. ***Determinați, în funcție de valorile lui*** m, ***numărul rădăcinilor ecuației considerate şi precizați semnul fiecăreia dintre rădăcini.***

Soluție: Evident, $x - 1 = m\,e^x \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{e^x} = m$. Pentru a răspunde cerinței enunțului, vom reprezenta grafic funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$. Remarcăm, mai întâi, că punctul $A(1,\ 0)$ reprezintă intersecția lui G_f cu

axa Ox şi că punctul $B(0,\ -1)$ este intersecţia lui G_f cu Oy. Deoarece funcţia f este continuă pe $\boldsymbol{R}$, rezultă că G_f nu are nici o asimptotă verticală. Evidenţiind faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, deducem că dreapta $y=0$ este asimptota orizontală la ramura spre ∞ a lui G_f. Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\infty$, rezultă că G_f nu are asimptotă oblică (orizontală) la ramura spre $-\infty$. Se arată cu uşurinţă că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ şi că $f'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}$ şi $f''(x)=\dfrac{x-3}{e^x}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$ şi $f''(x)=0\Leftrightarrow x=3$. Menţionăm şi faptul că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(2-x)$, iar $\operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn}(x-3)$. Ţinând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variaţie a funcţiei f este:

x	$-\infty$		0		1		2		3		∞
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↗ ∩	0	↗	e^{-2}	↘	$2e^{-3}$ i	↘ ∪	0

.

Graficul funcţiei este în **FIGURA 5** situată la pag. 308.

Având în vedere că ecuaţia din enunţ este cea care dă abscisele punctelor de intersecţie ale lui G_f cu dreapta $y=m$, deducem că:

dacă $m\in(-\infty,\ -1)$, ecuaţia considerată are o singură rădăcină, iar aceasta este negativă;
dacă $m=-1$, ecuaţia considerată are o singură rădăcină şi, anume, $x=0$;
dacă $m\in(-1,\ 0)$, ecuaţia considerată are o singură rădăcină, iar aceasta este pozitivă;
dacă $m=0$, ecuaţia considerată are o singură rădăcină şi, anume, $x=1$;
dacă $m\in(0,\ e^{-2})$, ecuaţia considerată are două rădăcini, iar ambele sunt pozitive;
dacă $m=e^{-2}$, ecuaţia considerată are o singură rădăcină, $x=2$;
dacă $m\in(e^{-2},\ \infty)$, ecuaţia considerată nu are nici o rădăcină.

6. ***Fie*** m ***un parametru real şi ecuaţia*** $\ln x^2-2x=m$. ***Stabiliţi, în funcţie de valorile lui*** m, ***numărul rădăcinilor acestei ecuaţii şi precizaţi semnul fiecăreia dintre rădăcini.***

Soluţie: Se arată cu uşurinţă că este necesar ca $x\neq 0$. Pentru a răspunde cerinţei enunţului, vom trasa graficul funcţiei $f:\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\ln x^2-2x$. Evident, f este continuă pe $\boldsymbol{R}^*$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$, rezultă că dreapta $x=0$ este asimptotă verticală a lui G_f. Remarcând că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(2\ln x-2x)=\lim\limits_{x\to\infty} 2x\left(\dfrac{\ln x}{x}-1\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\dfrac{\ln x}{x}-2\right)=-2$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)+2x\big)=\lim\limits_{x\to\infty} 2\ln x=\infty$, deducem că G_f nu are asimptotă oblică (orizontală) la ramura spre ∞. Analog, arătăm că G_f nu are asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$. Menţionăm şi faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$. Se arată cu uşurinţă că f este de două ori derivabilă pe $\boldsymbol{R}^*$ şi că $f'(x)=\dfrac{2(1-x)}{x}$, iar $f''(x)=-\dfrac{2}{x^2}$. Rezultă că $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ şi că $f''(x)<0$, oricare ar fi $x\in\boldsymbol{R}^*$. Remarcăm şi faptul că $\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}\big(x(1-x)\big)$. Deoarece f este strict descrescătoare pe $(-\infty,\ 0)$ (căci $f'(x)<0$), iar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$, există un singur $x_0\in(-\infty,\ 0)$ astfel încât $f(x_0)=0$. Ca urmare a celor stabilite anterior, tabelul de variaţie a funcţiei f este:

x	$-\infty$		x_0		0		1		∞
$f'(x)$		$-$		$-$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$ $-\infty$

.

Graficul funcției este în **FIGURA 6** situată la pag. 308.

Ținând seama că rădăcinile ecuației considerate reprezintă abscisele punctelor de intersecție ale lui G_f cu dreapta $y = m$, deducem că:

dacă $m \in (-\infty, -2)$, ecuația din enunț are trei rădăcini (una negativă și două strict pozitive);

dacă $m = -2$, ecuația din enunț are două rădăcini (una negativă și cealaltă strict pozitivă);

dacă $m \in (-2, \infty)$, ecuația din enunț are o singură rădăcină, iar aceasta este negativă.

7. ***Fie*** m ***un parametru real şi ecuația*** $(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} = mx + m$. ***Stabiliți, în funcție de valorile lui*** m***, numărul rădăcinilor acestei ecuații şi precizați semnul fiecăreia dintre rădăcini.***

Soluție: Deoarece -1 nu este rădăcină a ecuației considerate, rezultă că această ecuație este echivalentă cu

$$\frac{x-2}{x+1}e^{\frac{1}{x-2}} = m. \qquad (1)$$

Pentru a răspunde cerinței enunțului, vom reprezenta grafic funcția $f : \boldsymbol{R} \setminus \{-1, 2\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \frac{x-2}{x+1}e^{\frac{1}{x-2}}$. Se observă cu uşurință că G_f nu intersectează axa Ox şi că punctul $A\left(0, -\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ reprezintă intersecția lui G_f cu axa Oy. Evident, funcția f este continuă pe $\boldsymbol{R} \setminus \{-1, 2\}$. Remarcând că $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \infty$, deducem că dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală a lui G_f, iar dreapta $x = 2$ este asimptotă verticală (la dreapta) a lui G_f. Totodată, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$. Rezultă că dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală a lui G_f atât la ramura spre $-\infty$, cât şi la ramura spre ∞. Se arată cu uşurință că f este derivabilă pe $\boldsymbol{R} \setminus \{-1, 2\}$ şi că $f'(x) = \frac{2x-7}{(x+1)^2(x-2)} \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$. Deducem că $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ şi că $\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}\big((x-2)(2x+7)\big)$. Ținând seama de cele stabilite anterior, tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		-1		0		2		$\frac{7}{2}$		∞
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	∞ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	0	∞ $\searrow$	$\frac{\sqrt[3]{e^2}}{3}$	$\nearrow$	1

.

Graficul funcției este în **FIGURA 7** situată la pag. 308.

Având în vedere că rădăcinile ecuației considerate sunt abscisele punctelor de intersecție ale lui G_f cu dreapta $y = m$, conchidem că:

dacă $m \in \left(-\infty, \ -\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$, atunci ecuația (1) are o singură rădăcină, iar aceasta este negativă;

dacă $m = -\frac{2}{\sqrt{e}}$, atunci ecuația (1) are o singură rădăcină, şi anume, $x = 0$;

dacă $m \in \left(-\frac{2}{\sqrt{e}}, \ 0\right)$, ecuația (1) are o singură rădăcină, iar aceasta este strict pozitivă;

dacă $m \in \left[0, \ \frac{\sqrt[3]{e^2}}{3}\right)$, ecuația (1) nu are nici o rădăcină;

dacă $m = \frac{\sqrt[3]{e^2}}{3}$, ecuația (1) are o singură rădăcină, şi anume, $x = \frac{7}{2}$;

dacă $m \in \left(\frac{\sqrt[3]{e^2}}{3}, \ 1\right)$, ecuația (1) are două rădăcini (ambele strict pozitive);

dacă $m = 1$, ecuația (1) are o singură rădăcină, iar aceasta este strict pozitivă;

dacă $m \in (1, \ \infty)$, ecuația (1) are două rădăcini (una negativă şi una strict pozitivă).

(I) Reprezentări grafice

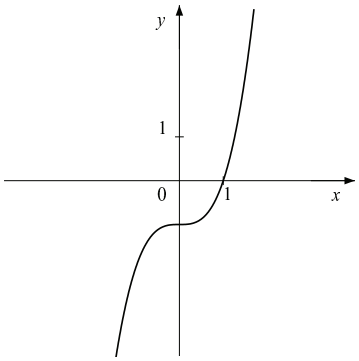


FIGURA 1. a)
$f(x) = x^3 - 1$

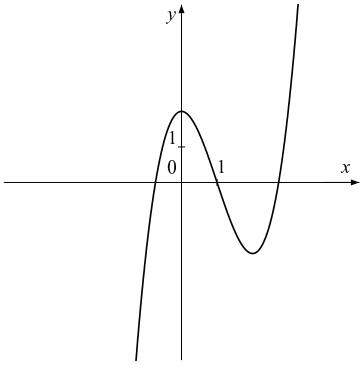


FIGURA 1. b)
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

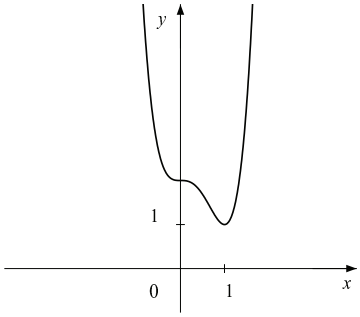


FIGURA 1. c)
$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$

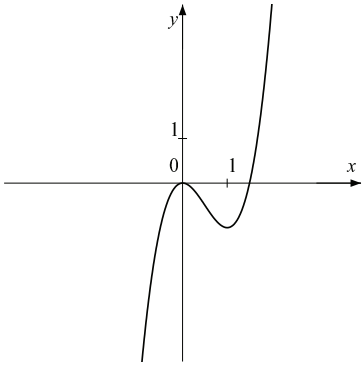


FIGURA 2. a)
$f(x) = 2x^3 - 3x^2$

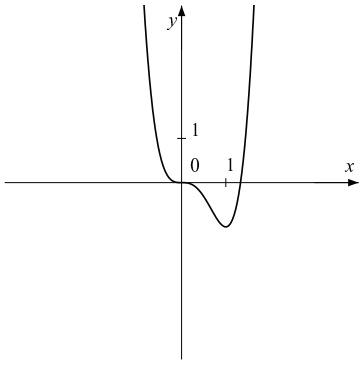


FIGURA 2. b)
$f(x) = 3x^4 - 4x^3$

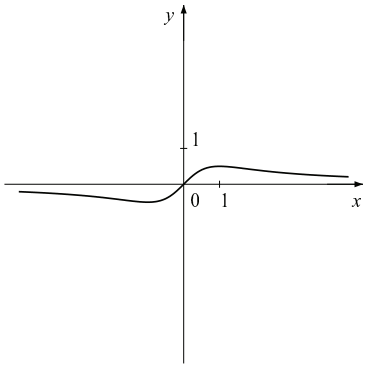


FIGURA 3. a)
$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

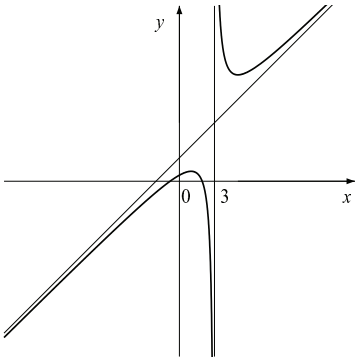


FIGURA 3. b) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-3}$

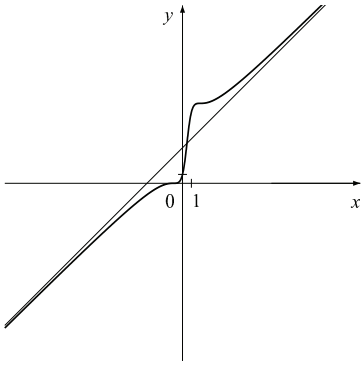


FIGURA 3. c) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2-x+1}$

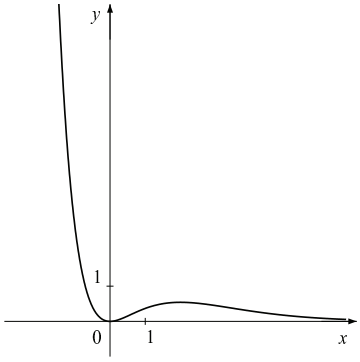


FIGURA 4. a)
$f(x) = x^2e^{-x}$

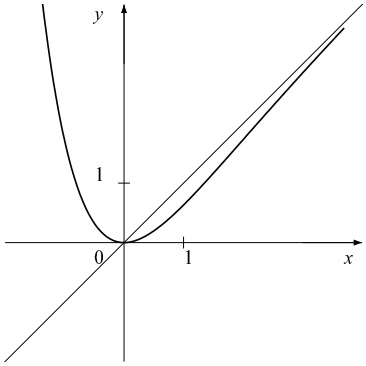


FIGURA 4. b)
$f(x) = x(1 - e^{-x})$

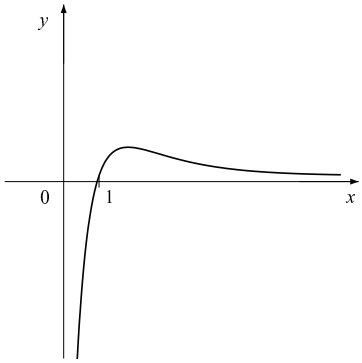


FIGURA 5. a)
$f(x) = \frac{\ln x}{x}$

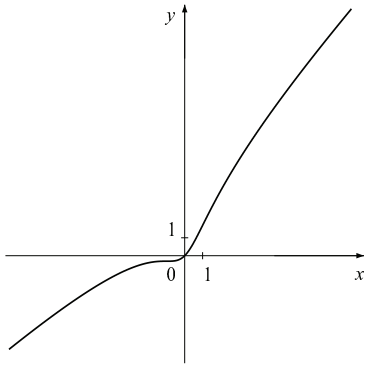


FIGURA 5. b)
$f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$

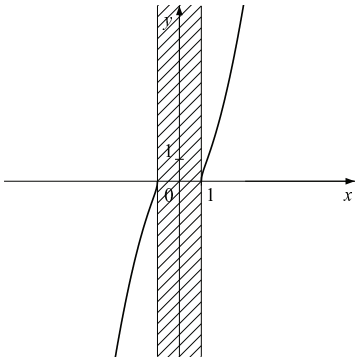


FIGURA 6. a)
$f(x) = x\sqrt{x^2-1}$

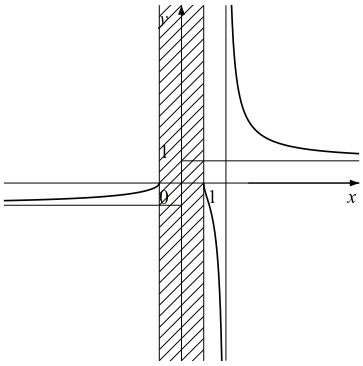


FIGURA 6. b)
$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$

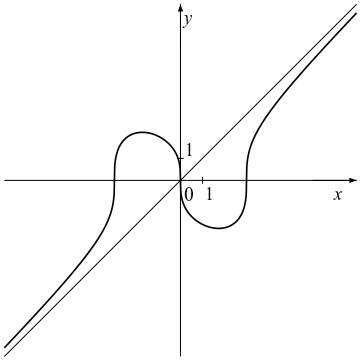


FIGURA 7. a)
$f(x) = \sqrt[3]{x^3-9x}$

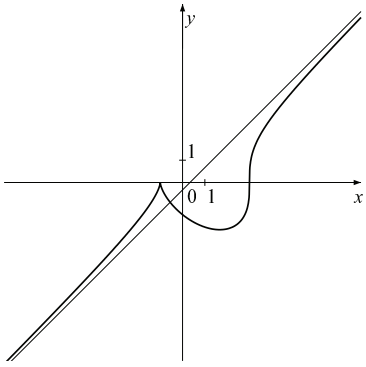


FIGURA 7. b)
$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2(x-3)}$

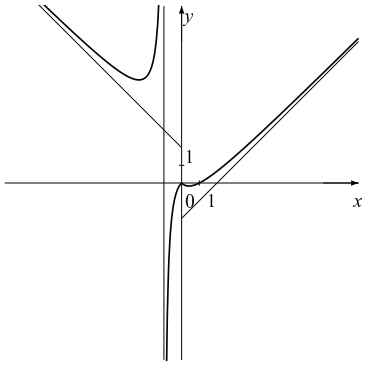


FIGURA 8. a) $f(x) = \frac{|x|(x-1)}{x+1}$

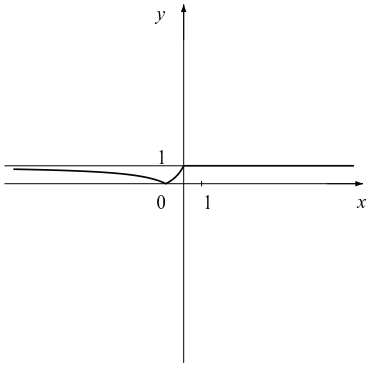


FIGURA 8. b) $f(x) = \frac{|x+1|}{|x|+1}$

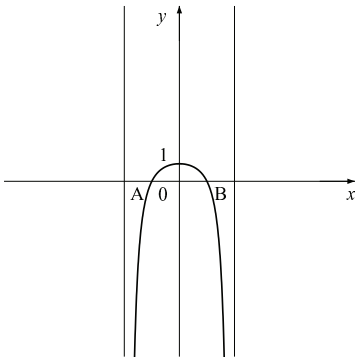


FIGURA 9. a) $f(x) = \frac{2\cos x}{1+\cos x}$

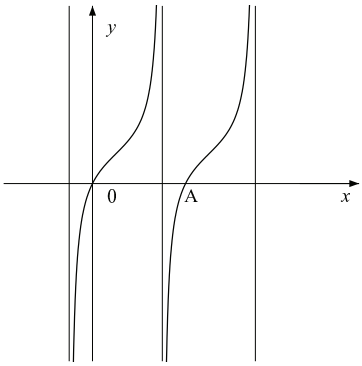


FIGURA 9. b) $f(x) = \frac{2\sin x}{\sin x+\cos x}$

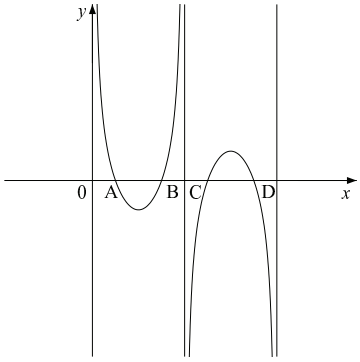


FIGURA 9. c)
$f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x}$

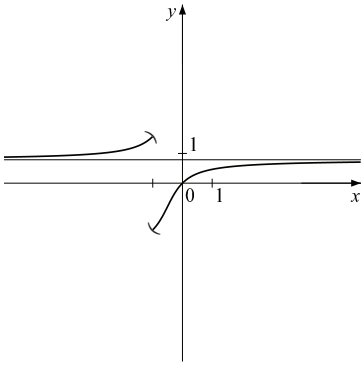


FIGURA 10. a) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}$

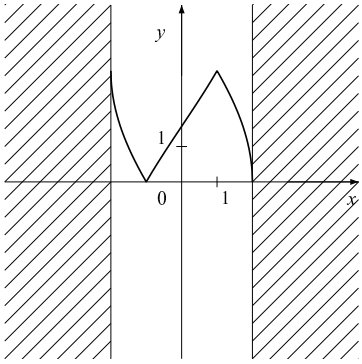


FIGURA 10. b)
$f(x) = \arccos\frac{x^3-3x}{2}$

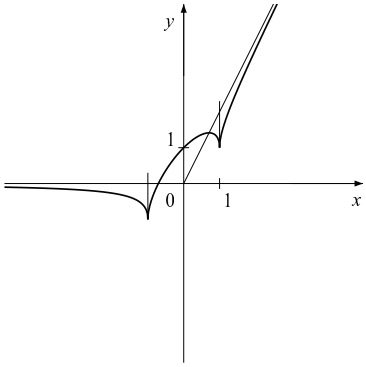


FIGURA 11.
$f(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$

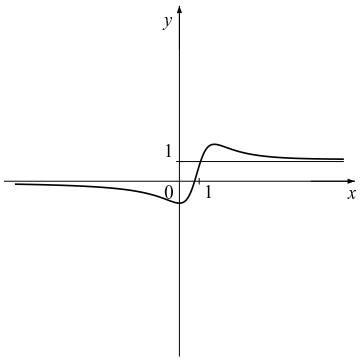


FIGURA 12. $f(x) = \frac{e^x-2}{e^x-2x}$

(II) Rezolvarea grafică a ecuaţiilor

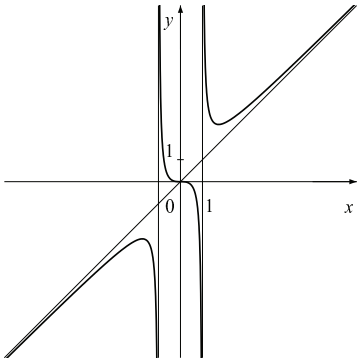


FIGURA 1. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

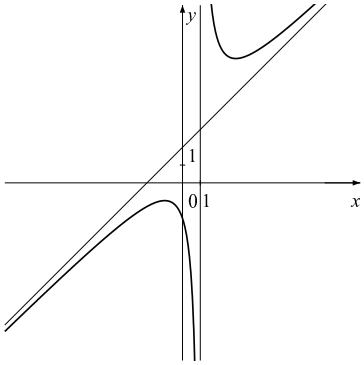


FIGURA 2. a) $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$

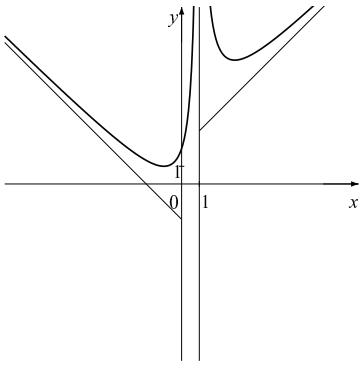


FIGURA 2. b)
$g(x) = \left|\frac{x^2+x+2}{x-1}\right|$

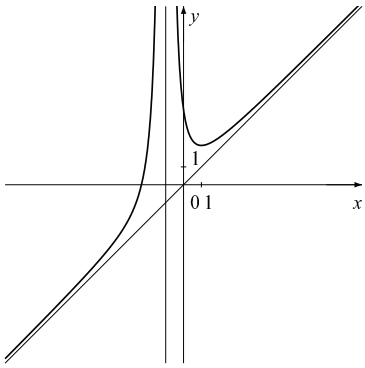


FIGURA 3.
$f(x) = x + \frac{4}{(x+1)^2}$

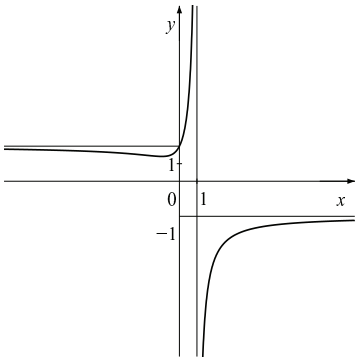


FIGURA 4. $f(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1}}{1-x}$

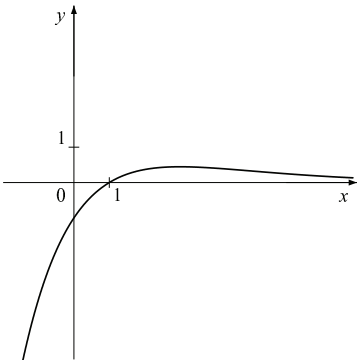


FIGURA 5. $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$

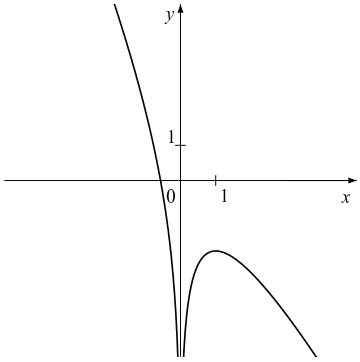


FIGURA 6.
$f(x) = \ln x^2 - 2x$

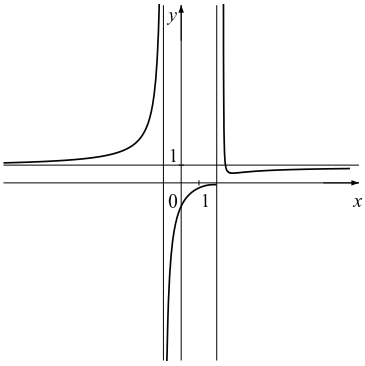


FIGURA 7.
$f(x) = \frac{x-2}{x+1} e^{\frac{1}{x-2}}$

BIBLIOGRAFIE

1. **Agnola T. şi alţii**, Matematica, BAC 2001, Editura Cuart, Bucureşti, 2001.
2. **Aramă L., Moruzan T.**, Culegere de probleme de analiză matematică, Editura Universal Pan, Bucureşti, 1996.
3. **Bătineţu D., Maftei I., Stancu-Minasian I.**, Exerciţii şi probleme de matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.
4. **Becheanu M., Grigore Gh., Ianuş S., Ichim I.**, Probleme de algebră, analiză matematică şi geometrie, Editura „Cartea Românească", Bucureşti, 1991.
5. **Berman G. N.**, A problem book in mathematical analisis, Mir Publishers, Moscow, 1997.
6. **Brânzei D. (coordonator) şi alţii**, Culegere de probleme pentru pregătirea bacalaureatului la matematică (modele tip 2003), Editura „Paralela 45", Piteşti, 2003.
7. **Brânzănescu V. şi alţii**, Culegere de probleme pentru admiterea în învăţământul superior, Editura Ştiinţifică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.
8. **Chiţescu I., Alexandrescu P., Rădulescu S., Rădulescu M.**, Analiză matematică, clasa a XI-a, Editura „Paralela 45", Piteşti, 1999.
9. **Ciorănescu N., Roşculeţ M.**, Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1959.
10. **Cohal T., Iurea Gh.**, Probleme de algebră pentru liceu, Editura „Polirom", Iaşi, 1998.
11. **Demidovitch B.**, Recueil d'exercices et de problemes d'analyse mathématique, Editions Mir, Moscov, 1974.
12. **Dinculeanu N., Radu E.**, Elemente de analiză matematică. Manual pentru clasa a XI-a. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978.
13. **Fadeev D., Sominski I.**, Recueil d'exercices d'algèbre supérieure, Editions Mir, Moscov, 1975.
14. **Ganga M.**, Matematica, manual pentru clasa a XI-a, vol I, Editura Mathpress, Ploieşti, 2002.
15. **Ganga M.**, Matematica, manual pentru clasa a XI-a, vol II, Editura Mathpress, Ploieşti, 2002.
16. **Giurgiu I., Turtoiu F.**, Culegere de probleme de matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
17. **Gussi Gh., Stănăşilă O., Stoica T.**, Elemente de analiză matematică. Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.
18. **Iurea Gh., Răducanu P., Dorobanţu D., Secrieru I.**, Analiză matematică, Editura Eurocart, Iaşi, 2002.
19. **Lupaş L., Lupaş A., Cobârzan C., Lascu M., Tuduce Fl., Vlaicu L.**, Probleme de algebră, Editura „Gil", Zalău, 1996.
20. **Năstăsescu C., Niţă C., Stănescu I.**, Elemente de algebră superioară. Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1990.
21. **Năstăsescu C., Niţă C., Brandiburu M., Joiţa D.**, Exerciţii şi probleme de algebră pentru clasele IX – XII, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
22. **Pârşan L., Ionescu-Ţiu C.**, Probleme de matematică pentru elevii de liceu, Editura „Facla", Timişoara, 1979.
23. **Preoteasa L., Stan M.**, Bacalaureat 2000 – Teste de matematică, Editura Humanitas, Bucureşti, 2000.
24. **Preoteasa L., Stan M., Andronache M.**, Bacalaureat 2001 – Teste de matematică, Editura Humanitas, Bucureşti, 2001.
25. **Roşculeţ M., Popescu O.**, Probleme de analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.
26. Colecţia „Gazeta matematică".
27. Colecţia „Revista matematică a elevilor din Timişoara".
28. Colecţia „Recreaţii matematice", Iaşi.

LA EDITURA TAIDA AU MAI APĂRUT:

COLECȚIA DIDACTICA – MATE BT

1. *A. Bălăucă şi colaboratorii* ⇨ ***ARITMETICĂ,*** Clasa a **V**-a

2. *A. Bălăucă şi colaboratorii* ⇨ ***ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. GEOMETRIE,*** Clasa a **VI**-a

2. *A. Bălăucă şi colaboratorii* ⇨ ***ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. GEOMETRIE,*** Clasa a **VII**-a

3. *A. Bălăucă şi colaboratorii* ⇨ ***ALGEBRĂ. GEOMETRIE,*** Clasa a **VIII**-a

4. *A. Bălăucă şi colaboratorii* ⇨ ***MATEMATICĂ PENTRU ACTIVITĂȚI OPȚIONALE,*** Clasele **V-VIII**

COLECȚIA DIDACTICA – LIMBA ŞI LITERATURA ROMÂNĂ

1. *I. Cojocaru, E. Butnaru* ⇨ ***LIMBA ŞI LITERATURA ROMÂNĂ, AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa a **V**-a

2. *I. Cojocaru, E. Butnaru* ⇨ ***LIMBA ŞI LITERATURA ROMÂNĂ. AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa a **VI**-a

3. *I. Cojocaru şi colaboratorii* ⇨ ***LIMBA ŞI LITERATURA ROMÂNĂ. AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa a **VII**-a

4. *E. Butnaru şi colaboratorii* ⇨ ***LIMBA ŞI LITERATURA ROMÂNĂ, AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa a **VIII**-a

COLECȚIA DIDACTICA – CONCURSURI ŞI OLIMPIADE

1. *A. Bălăucă* ⇨ ***MATEMATICĂ. OLIMPIADE ŞI CONCURSURI,*** Clasa a **V**-a

2. *A. Bălăucă* ⇨ ***MATEMATICĂ. OLIMPIADE ŞI CONCURSURI,*** Clasa a **VI**-a

3. *A. Bălăucă* ⇨ ***MATEMATICĂ. OLIMPIADE ŞI CONCURSURI,*** Clasa a **VII**-a

4. *A. Bălăucă* ⇨ ***MATEMATICĂ. OLIMPIADE ŞI CONCURSURI,*** Clasa a **VIII**-a

5. *A. Bălăucă şi colaboratorii* ⇨ ***MATEMATICĂ. OLIMPIADELE NAȚIONALE ALE ROMÂNIEI ŞI REPUBLICII MOLDOVA. BALCANIADA DE MATEMATICĂ PENTRU JUNIORI,*** Clasele **VI - VIII**

6. *A. Bălăucă* ⇨ ***CONCURSURI BOTOŞĂNENE DE MATEMATICĂ***

7. *C. Chirilă, I. Nechifor, A. Păduraru, J. Grigoraş* ⇨ ***CONCURSUL DE MATEMATICĂ „FLORICA T. CÂMPAN"***

8. *S. Grigore, L. Țibrea* ⇨ ***CONCURSUL DE MATEMATICĂ „EUCLID"***

9. *C. Savu, E. Savu* ⇨ ***CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ANGHEL SALIGNY"***

COLECȚIA DIDACTICA – TESTĂRI NAȚIONALE

1. *A. Bălăucă şi colaboratorii* ⇨ ***ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. GEOMETRIE – 182 DE TESTE ŞI SINTEZE PENTRU TESTAREA NAȚIONALĂ ,*** Clasele **V-VIII**

2. *A. Talaşman, V. Ailioaie* ⇨ ***CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ,*** Clasele **V-VIII**

3. *A. Bălăucă, E. Butnaru, C. Leşan, M. Petrea* ⇨ ***MATEMATICĂ. LIMBA ŞI LITERATURA ROMÂNĂ. ISTORIA ROMÂNILOR. GEOGRAFIA ROMÂNIEI – 130 DE TESTE NAȚIONALE – 2006***

4. *I. Cojocaru, E. Butnaru, L. Buhaciuc* ⇨ ***LIMBA ŞI LITERATURA ROMÂNĂ – 88 DE TESTE ŞI SINTEZE PENTRU RECAPITULARE ŞI EVALUARE ÎN VEDEREA PREGĂTIRII TESTĂRII NAȚIONALE PENTRU ADMITEREA ÎN LICEU,*** CLASELE **V - VIII**

5. *M. Petrea, I. Mintici, D. Mintici* ⇨ ***GEOGRAFIA ROMÂNIEI – TESTE ŞI SINTEZE PENTRU TESTAREA NAȚIONALĂ ŞI CONCURSURILE ŞCOLARE***

6. *C. Leşan, P. Leşan* ⇨ ***ISTORIA ROMÂNILOR – TESTE ŞI SINTEZE PENTRU TESTAREA NAȚIONALĂ,*** Clasa **a VIII-a**

COLECȚIA DIDACTICA – ÎNVĂȚĂMÂNT PRIMAR

1. *V. Avîrvărei* ⇨ ***DESENUL MEU ABC..., AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **I**

2. *V. Avîrvărei, V. Avăcăriței* ⇨ ***PRIMA MEA CARTE - ABC..., AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **I**

3. *V. Avîrvărei şi colaboratorii* ⇨ ***SĂ SCRIEM CU MARTINEL. CAIET DE SCRIERE, AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **I**

4. *V. Avîrvărei, V. Avăcăriței* ⇨ ***MATEMATICĂ. AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **I**

5. *V. Avîrvărei şi colaboratorii* ⇨ ***MATEMATICĂ. AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **a II-a**

6. *V. Avîrvărei, I. Panainte, N. Gora* ⇨ ***LIMBA ŞI LITERATURA ROMÂNĂ. AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **a II-a**

7. *M. Ungureanu şi colaboratorii* ⇨ ***CUNOAŞTEREA MEDIULUI ÎNCONJURĂTOR. AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **a II-a**

8. *V. Avîrvărei şi colaboratorii* ⇨ ***LIMBA ŞI LITERATURA ROMÂNĂ. AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **a III-a**

9. *V. Avîrvărei şi colaboratorii* ⇨ ***MATEMATICĂ. AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **a III-a**

10. *V. Avîrvărei, A. Bălăucă* ⇨ ***MATEMATICĂ. AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **a IV-a**

11. *V. Avîrvărei şi colaboratorii* ⇨ ***LIMBA ŞI LITERATURA ROMÂNĂ. AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **a IV-a**

12. *C. Palade, L. Palade* ⇨ ***MUZICA VOCALĂ,*** Clasele **III-IV**

13. *A.R. Petrea* ⇨ ***LIMBA ENGLEZĂ,*** Clasele **III-IV**

14. *C. Palade, I. Panainte, N. Gora, M. Ungureanu, V. Avîrvărei* ⇨ ***SĂRBĂTOAREA FULGILOR DE NEA***

COLECȚIA DIDACTICA

1. *I. Mintici, V. Blândă, L. Cocuți, R. Mihai* ⇨ ***GEOGRAFIE GENERALĂ***, ***AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **a V-a**

2. *E. Asăndulesei, I. Nechifor, A. Păduraru, E. M. Vlasie* ⇨ ***GHIDUL PRACTIC AL DIRIGINTELUI***

© Editura **TAIDA**
Toate drepturile, aparţin Editurii TAIDA. Nici o parte a acestei cărţi nu poate fi retipărită, reprodusă sau utilizată în orice alt fel, inclusiv prin fotocopiere sau în formă electronică, fără avizul prealabil în scris al editurii.

PENTRU COMENZI VĂ RUGĂM SĂ VĂ ADRESAŢI EDITURII TAIDA

- **La adresa:** ***Str. Vasile Lupu, nr. 70-74, Bl. P3, sc. 3, et. 3, ap. 12, Iaşi – 700309***
- **Telefonic:** ***0232.270250; Gsm. 0744.320323***
- **Prin fax:** ***0232-270250***
- **Prin email:** ***office@edituratataida.ro***
- **Online:** ***www.edituratataida.ro; www.eduzone.ro***

Editor: ***TUDOR TCACIUC***
CORECTURA AUTORILOR
Coperta: ***MIHAELA URSULEANU***

www.edituratataida.ro
www.eduzone.ro